問題冊子

平成22年度（2010年度）日本留学試験

数 学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II 問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら手をあげて知らせてください。

5．問題冊子には，メモや計算などを書いてもいいです。

III 解答用紙に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。

2．問題文中の**A**，**B**，**C**，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，0から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

解答方法に関する注意

(1) 根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例：$\sqrt{12}$ のときは，$2\sqrt{3}$ と答えます。)

(2) 符号は分子につけ，分母・分子は既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
(例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3) $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，以下のようにマークしてください。

(4) $\boxed{DE}x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	⊖	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	⊖	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	⊖	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

3．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊					
名　　前													

数学 コース 1
(基本コース)

(コース2は 15 ページからです)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　方程式

$$(x-1)^2 = |3x-5| \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。

(1)　方程式 ① の解のうち $x \geqq \dfrac{5}{3}$ を満たす解は，$x =$ $\boxed{\mathbf{A}}$，$\boxed{\mathbf{B}}$ である。ただし，$\boxed{\mathrm{A}} < \boxed{\mathrm{B}}$ とする。

(2)　方程式 ① の解は全部で $\boxed{\mathbf{C}}$ 個ある。その解のうちで最小のものを α とすると，$m-1 < \alpha \leqq m$ を満たす整数 m は $\boxed{\mathbf{DE}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　実数 x, y に関する次の 3 つの条件 (a), (b), (c) を考える。

(a)　$x+y=5$,　$xy=3$ を満たす

(b)　$x+y=5$,　$x^2+y^2=19$ を満たす

(c)　$x^2+y^2=19$,　$xy=3$ を満たす

(1)　等式 $x^2+y^2=(x+y)^2-\boxed{\mathsf{F}}\,xy$ を用いると

条件 (b) のとき　$xy=\boxed{\mathsf{G}}$,

条件 (c) のとき　$x+y=\boxed{\mathsf{H}}$　または　$x+y=\boxed{\mathsf{IJ}}$

が得られる。

(2)　次の $\boxed{\mathsf{K}}$ ～ $\boxed{\mathsf{M}}$ には，下の ⓪ ～ ③ のうちから適するものを一つずつ選びなさい。

(i)　(a) は (b) であるための $\boxed{\mathsf{K}}$。

(ii)　(b) は (c) であるための $\boxed{\mathsf{L}}$。

(iii)　(c) は (a) であるための $\boxed{\mathsf{M}}$。

⓪　必要十分条件である

①　十分条件であるが，必要条件ではない

②　必要条件であるが，十分条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{N}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　5 個の数字 0，1，2，3，4 を使って 4 桁（けた）の整数を作る。ただし，0123 などは 4 桁の整数ではない。

(1)　各桁の数字がすべて異なるものは，全部で **AB** 個ある。このうち，0 を使わないものは **CD** 個ある。

(2)　同じ数字を何度使っても良いことにする。このとき，4 桁の整数は全部で **EFG** 個できる。このうち

(i)　1 と 3 を 2 個ずつ使うものは **H** 個ある。

(ii)　0 と 4 を 2 個ずつ使うものは **I** 個ある。

(iii)　2 つの数字を 2 個ずつ使うものは **JK** 個ある。

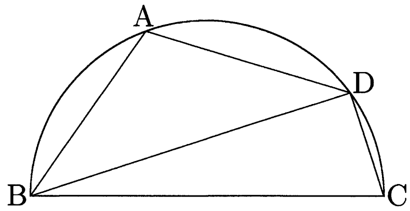
注）4 桁：four-digit

- 計算欄 (memo) -

問 2　BC を直径とする半円に，三角形 ABD が図のように内接している。ここで

$$\mathrm{AB} = 3, \quad \mathrm{BD} = 5, \quad \tan\angle\mathrm{ABD} = \frac{3}{4}$$

とする。このとき，四角形 ABCD の残りの 3 辺 BC，CD，DA の長さと四角形 ABCD の面積 S を求めよう。



まず，$\cos\angle\mathrm{ABD} = \dfrac{\boxed{\mathsf{L}}}{\boxed{\mathsf{M}}}$ であるから，$\mathrm{DA} = \sqrt{\boxed{\mathsf{NO}}}$ である。

また，$\sin\angle\mathrm{ABD} = \dfrac{\boxed{\mathsf{P}}}{\boxed{\mathsf{Q}}}$ であるから，$\mathrm{BC} = \dfrac{\boxed{\mathsf{R}}\sqrt{\boxed{\mathsf{ST}}}}{\boxed{\mathsf{U}}}$ であり，

$\mathrm{CD} = \dfrac{\boxed{\mathsf{V}}}{\boxed{\mathsf{W}}}$ である。以上より

$$S = \frac{\boxed{\mathsf{XY}}}{\boxed{\mathsf{Z}}}$$

である。

注）内接する：be inscribed

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。

III

x の 2 次方程式

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$2x^2 + 3x + a^2 + 12a = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を考え，① の解を α, β $(\alpha < \beta)$ とおく。このとき，② が 2 つの実数解 γ, δ をもち

$$\alpha < \gamma < \beta < \delta$$

となるような a の値の範囲を求めよう。

(1)　$\alpha =$ **AB**，$\beta =$ **C** である。

(2)　$b = a^2 + 12a$ とおくと，b は条件 $\alpha < \gamma$ より

$$b > \boxed{\mathsf{DEF}}$$

を満たし，条件 $\gamma < \beta < \delta$ より

$$b < \boxed{\mathsf{GHI}}$$

を満たすことがわかる。

したがって，求める a の値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{JK}} < a < \boxed{\mathsf{LM}}, \quad \boxed{\mathsf{NO}} < a < \boxed{\mathsf{PQ}}$$

である。ただし，JK < NO とする。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{R}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

2つの等式

$$x + y - z = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$2x - y + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を同時に満たすすべての x, y, z に対して，等式

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

が成り立つとする。このとき，a, b, c の値を求めよう。

まず，①, ② より y, z を x を用いて表すと

$$y = \boxed{\mathsf{A}}\,x + \boxed{\mathsf{B}}, \quad z = \boxed{\mathsf{C}}\,x + \boxed{\mathsf{D}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

となるから，y, z は x の値によって決まることがわかる。

次に，④ を ③ に代入して，左辺を x について降べきの順に整理すると

$$(a + \boxed{\mathsf{E}}\,b + \boxed{\mathsf{F}}\,c)x^2 + (\boxed{\mathsf{G}}\,b + \boxed{\mathsf{H}}\,c)x + b + c = 1$$

となる。この等式はすべての x に対して成り立つから，$x = 0$，$x = 1$，$x = -1$ を代入しても成り立つ。よって

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ a + 9b + \boxed{\mathsf{IJ}}\,c = 1 \\ a + b + \boxed{\mathsf{K}}\,c = 1 \end{cases}$$

を得る。よって，これらを a, b, c の連立方程式とみて解くと

$$a = \boxed{\mathsf{L}}, \qquad b = \boxed{\mathsf{M}}, \qquad c = \boxed{\mathsf{NO}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{P}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか、
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　方程式

$$(x-1)^2 = |3x-5| \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。

(1)　方程式 ① の解のうち $x \geqq \frac{5}{3}$ を満たす解は，$x =$ $\boxed{\mathbf{A}}$，$\boxed{\mathbf{B}}$ である。ただし，$\boxed{\mathrm{A}} < \boxed{\mathrm{B}}$ とする。

(2)　方程式 ① の解は全部で $\boxed{\mathbf{C}}$ 個ある。その解のうちで最小のものを α とすると，$m-1 < \alpha \leqq m$ を満たす整数 m は $\boxed{\mathbf{DE}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　実数 x, y に関する次の 3 つの条件 (a), (b), (c) を考える。

(a)　$x+y=5$,　$xy=3$ を満たす

(b)　$x+y=5$,　$x^2+y^2=19$ を満たす

(c)　$x^2+y^2=19$,　$xy=3$ を満たす

(1)　等式 $x^2+y^2=(x+y)^2-\boxed{\mathsf{F}}\,xy$ を用いると

条件 (b) のとき　$xy=\boxed{\mathsf{G}}$,

条件 (c) のとき　$x+y=\boxed{\mathsf{H}}$　または　$x+y=\boxed{\mathsf{IJ}}$

が得られる。

(2)　次の $\boxed{\mathsf{K}}$ ～ $\boxed{\mathsf{M}}$ には，下の ⓪ ～ ③ のうちから適するものを一つずつ選びなさい。

(i)　(a) は (b) であるための $\boxed{\mathsf{K}}$。

(ii)　(b) は (c) であるための $\boxed{\mathsf{L}}$。

(iii)　(c) は (a) であるための $\boxed{\mathsf{M}}$。

⓪　必要十分条件である

①　十分条件であるが，必要条件ではない

②　必要条件であるが，十分条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{N}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

xy 平面上に 2 直線

$$y = 1, \quad y = -1$$

および点 A(0, 3) が与えられている。

いま，直線 $y = 1$ 上に点 P を，直線 $y = -1$ 上に点 Q をとり

$$\angle \mathrm{PAQ} = 90^\circ$$

であるとする。2 点 P, Q がこれらの条件を満たして動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよう。

まず，P の座標を $(\alpha, 1)$，Q の座標を $(\beta, -1)$ とする。このとき，$\angle \mathrm{PAQ} = 90^\circ$ を満たすことは，$\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$ で

$$\alpha\beta = \boxed{\mathbf{AB}}$$

となることである。よって，α, β は異符号であるから，$\alpha < 0 < \beta$ としよう。

このとき

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= (\beta - \alpha)^2 + \boxed{\mathbf{C}} \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \boxed{\mathbf{DE}} \\ &\geqq 2|\alpha\beta| + \boxed{\mathrm{DE}} = \boxed{\mathbf{FG}} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$\mathrm{PQ} \geqq \boxed{\mathbf{H}}$$

である。よって，PQ は

$$\alpha = \boxed{\mathbf{IJ}}\sqrt{\boxed{\mathbf{K}}}, \quad \beta = \boxed{\mathbf{L}}\sqrt{\boxed{\mathbf{M}}}$$

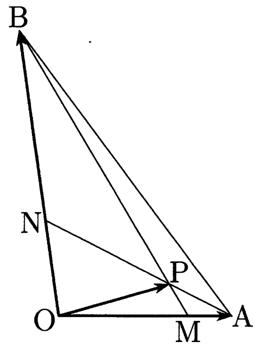
のとき，最小値 $\boxed{\mathrm{H}}$ をとる。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{N}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

三角形 OAB を考える。辺 OA を 3 : 1 に内分する点を M，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を N とし，線分 AN と線分 BM の交点を P とする。



(1)　ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表すことを考える。

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PN} = s : (1-s) \qquad (0 < s < 1)$$
$$\mathrm{BP} : \mathrm{PM} = t : (1-t) \qquad (0 < t < 1)$$

とおくと

$$\overrightarrow{OP} = (\boxed{\mathbf{A}} - s)\vec{a} + \frac{\boxed{\mathbf{B}}}{\boxed{\mathbf{C}}} s\vec{b}$$
$$= \frac{\boxed{\mathbf{D}}}{\boxed{\mathbf{E}}} t\vec{a} + (\boxed{\mathbf{F}} - t)\vec{b}$$

が成り立つから

$$s = \frac{\boxed{\mathbf{G}}}{\boxed{\mathbf{H}}}, \quad t = \frac{\boxed{\mathbf{I}}}{\boxed{\mathbf{J}}}$$

である。したがって，$\overrightarrow{OP}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\mathbf{K}}}{\boxed{\mathbf{L}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\mathbf{M}}}{\boxed{\mathbf{N}}}\vec{b}$$

と表される。

（問は次ページに続く）

注） 内分する : divide internally ， 内積 : inner product

(2)　$\mathrm{OA} = 6$，$\mathrm{OB} = 9$ のとき，線分 OP の長さと $\angle\mathrm{AOB}$ の大きさとの関係を調べよう。

OP の長さを ℓ とおくとき，ℓ^2 を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いて表すと

$$\ell^2 = \frac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{PQ}}}\vec{a}\cdot\vec{b} + \boxed{\mathsf{RS}}$$

を得る。

したがって，例えば，$\ell = 4$ のとき

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\boxed{\mathsf{TU}}}{\boxed{\mathsf{V}}}$$

である。

一方，$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさを変えるとき，ℓ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{W}} < \ell < \boxed{\mathsf{X}}$$

である。

$\boxed{\mathrm{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{III}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{Y}}$，$\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　x の関数 $f(x)=\log(4x-\log x)$ がある。ここで，log は自然対数とする。$f''(x)$ を求めて $f(x)$ の極値を調べよう。

ただし，$\boxed{\mathsf{K}}$，$\boxed{\mathsf{L}}$ には，下の ⓪ ～ ⑥ のうちから最も適するものを一つずつ選びなさい。

まず，$f'(x)$，$f''(x)$ を求めると

$$f'(x) = \frac{\boxed{\mathsf{A}} - \dfrac{\boxed{\mathsf{B}}}{x}}{4x-\log x}$$

$$f''(x) = \frac{\dfrac{1}{x^{\boxed{\mathsf{C}}}}(4x-\log x) - \left(\boxed{\mathsf{A}} - \dfrac{\boxed{\mathsf{B}}}{x}\right)^{\boxed{\mathsf{D}}}}{(4x-\log x)^2}$$

となる。これより

$$f'\left(\frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}\right) = 0$$

$$f''\left(\frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}\right) = \frac{\boxed{\mathsf{GH}}}{\boxed{\mathsf{I}}+\log\boxed{\mathsf{J}}}$$

となる。このとき

$$f''\left(\frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}\right) \boxed{\mathsf{K}}\ 0$$

であるから，$f(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}$ で $\boxed{\mathsf{L}}$ となる。また，そのときの値は

$\log\left(\boxed{\mathsf{M}}+\log\boxed{\mathsf{N}}\right)$ である。

⓪ $=$　　① $>$　　② $\geqq$　　③ $<$　　④ $\leqq$　　⑤ 極大　　⑥ 極小

注） 自然対数：natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

問 2　曲線 $y=2\cos 2x$ と曲線 $y=4\cos x+k$ は，$x=a$ $\left(0<a \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で共通の接線をもつとする。

(1)　$f(x)=2\cos 2x$，$g(x)=4\cos x+k$ とおく。題意より，2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $x=a$ で共通の接線をもつから

$$f'(a)=g'(a), \quad f(a)=g(a)$$

である。

$f'(a)=g'(a)$ と $0<a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ から $a=\dfrac{\pi}{\boxed{\mathbf{O}}}$ であり，$f(a)=g(a)$ から $k=-\boxed{\mathbf{P}}$ を得る。

したがって，接点の座標は $\left(\dfrac{\pi}{\boxed{\mathrm{O}}},\ -\boxed{\mathbf{Q}}\right)$ であり，共通の接線の方程式は

$$y=-\boxed{\mathbf{R}}\sqrt{\boxed{\mathbf{S}}}\left(x-\frac{\pi}{\boxed{\mathbf{T}}}\right)-\boxed{\mathbf{U}}$$

である。

(2)　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，この 2 つの曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよう。

2 つの曲線はともに y 軸に関して対称であるから，$b=\boxed{\mathbf{V}}$，$c=\dfrac{\pi}{\boxed{\mathrm{O}}}$ として

$$S=\boxed{\mathbf{W}}\int_b^c (2\cos 2x-4\cos x-k)\,dx$$

であり，これを計算して

$$S=\boxed{\mathbf{X}}\pi-\boxed{\mathbf{Y}}\sqrt{\boxed{\mathbf{Z}}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\mathrm{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか、
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。