平成27年度（2015年度）日本留学試験　**問題冊子**

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　**どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。**

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。

2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，A，BC のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\dfrac{2}{6}$ は $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ は $\dfrac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\mathrm{A}}\sqrt{\boxed{\mathrm{B}}}}{\boxed{\mathrm{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\mathrm{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　前														

数学 コース 1
（基本コース）

（コース２は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　$P = 10a^2 + 14ab - 21bc - 15ca$ とする。

(1)　P を因数分解すると

$$P = \left(\boxed{\mathbf{A}}\,a + \boxed{\mathbf{B}}\,b\right)\left(\boxed{\mathbf{C}}\,a - \boxed{\mathbf{D}}\,c\right)$$

である。

(2)　$5a = \sqrt{6}$，$14b = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$，$15c = \sqrt{12} - \sqrt{8}$ とすると

$$P = \frac{\boxed{\mathbf{E}} + \boxed{\mathbf{F}}\sqrt{\boxed{\mathbf{G}}}}{\boxed{\mathbf{H}}}$$

である。このとき，P より小さい整数の中で最も大きいものは $\boxed{\mathbf{I}}$ である。

注） 因数分解する：factorize

- 計算欄 (memo) -

問 2　2 つの袋 A, B がある。A の袋には白球が 4 個，赤球が 1 個入っており，B の袋には白球が 2 個，赤球が 3 個入っている。はじめに A の袋から同時に 2 個の球を取り出し，続いて，B の袋から同時に 2 個の球を取り出す。

(1)　A から 2 個の白球を取り出し，B からは白球と赤球をそれぞれ 1 個ずつ取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{J}}}{\boxed{\mathsf{KL}}}$ である。

(2)　取り出した 4 個の球の中に，3 個の白球と 1 個の赤球が入っている確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{M}}}{\boxed{\mathsf{N}}}$ である。

(3)　取り出した 4 個の球がすべて同じ色である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{PQ}}}$ である。

(4)　取り出した 4 個の球の中に含まれる白球が 2 個以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{RS}}}{\boxed{\mathsf{TU}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{V}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

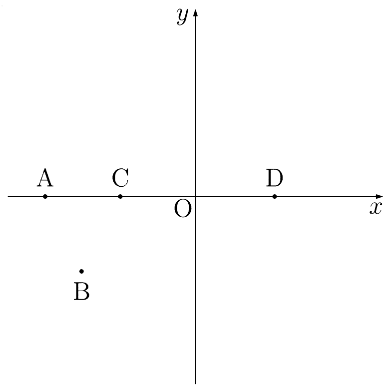
II

問 1　2 つの放物線

$$\ell: \quad y = ax^2 + 2bx + c$$

$$m: \quad y = (a+1)x^2 + 2(b+2)x + c + 3$$

を考える。点 A, B, C, D が右図のような位置関係にあるとする。このとき，この 2 つの放物線のうち，一方は，3 点 A, B, C を通り，もう一方は，3 点 B, C, D を通るとする。



(1)　3 点 A, B, C を通る放物線は $\boxed{\text{A}}$ である。ただし，$\boxed{\text{A}}$ には，次の ⓪ か ① のどちらか適するものを選びなさい。

⓪　放物線 ℓ　　　①　放物線 m

(2)　2 つの放物線 ℓ, m は，どちらも 2 点 B, C を通るので，点 B, C の x座標は，2 次方程式

$$x^2 + \boxed{\text{B}}\,x + \boxed{\text{C}} = 0$$

の解である。よって，点 B の x座標は $\boxed{\text{DE}}$，点 C の x座標は $\boxed{\text{FG}}$ である。

(3)　特に，AB = BC，CO = OD のとき，a, b, c の値を求めよう。

2 点 C, D は y軸に関して対称であるから，$b = \boxed{\text{H}}$ である。また，AB = BC より，直線 $x = \boxed{\text{IJ}}$ が $\boxed{\text{A}}$ の軸である。したがって，$a = -\dfrac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}$ である。よって，$c = \dfrac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}$ である。

注）対称：symmetry

- 計算欄 (memo) -

問 2　$3a+1$ が a^2+5 の約数となるような自然数 a を求めよう。

$3a+1=b$ とする。このとき

$$a^2+5=\frac{b^2-\boxed{\mathsf{O}}\,b+\boxed{\mathsf{PQ}}}{\boxed{\mathsf{R}}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。また，b は a^2+5 の約数であるから，a^2+5 はある自然数 c を用いて

$$a^2+5=bc \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

と表される。①, ② から

$$b\left(\boxed{\mathsf{S}}\,c-b+\boxed{\mathsf{T}}\right)=\boxed{\mathsf{UV}}$$

を得る。したがって，b は $\boxed{\mathsf{UV}}$ の約数である。この中で，a が自然数となるのは $b=\boxed{\mathsf{WX}}$ である。したがって，$a=\boxed{\mathsf{YZ}}$ である。

注）約数：divisor

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。

III

3 辺の長さが 15, 19, 23 の三角形がある。この三角形の 3 辺をそれぞれ x だけ短くした鈍角三角形を作ることを考える。このとき，x の値の範囲を求めよう。

まず，$15-x$, $19-x$, $23-x$ という 3 つの値が，三角形の 3 辺の長さとなる条件より

$$x < \boxed{\mathsf{AB}}$$

を得る。

さらに，その三角形が鈍角三角形となるのは，x が

$$x^2 - \boxed{\mathsf{CD}}\,x + \boxed{\mathsf{EF}} < 0$$

を満たすときである。この 2 次不等式を解いて

$$\boxed{\mathsf{G}} < x < \boxed{\mathsf{HI}}$$

を得る。

よって，求める x の値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{J}} < x < \boxed{\mathsf{KL}}$$

である。

注） 鈍角三角形：obtuse triangle

- 計算欄 (memo) -

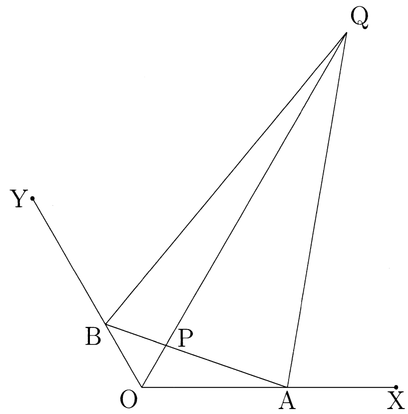
$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{M}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

右図において

$$\mathrm{OA}=6,\quad \mathrm{OB}=3,\quad \angle\mathrm{AOB}=120^\circ$$

とし，点 Q は ∠XAB の二等分線と ∠ABY の二等分線の交点であるとする。さらに，線分 AB と線分 OQ の交点を P とする。このとき，線分 PQ の長さを求めよう。



(1)　まず，AB ＝ $\boxed{\mathbf{A}}\sqrt{\boxed{\mathbf{B}}}$ であり，三角形 OAB の面積は $\dfrac{\boxed{\mathbf{C}}\sqrt{\boxed{\mathbf{D}}}}{\boxed{\mathbf{E}}}$ である。

(2)　次の文中の $\boxed{\mathbf{F}}$，$\boxed{\mathbf{G}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ④ の中から適するものを選びなさい。

⓪ AB　　① AP　　② AQ　　③ BP　　④ BQ

AQ は三角形 OAP の ∠A の外角の二等分線であり，BQ は三角形 OBP の ∠B の外角の二等分線であるから

$$\mathrm{OQ}:\mathrm{PQ} = \mathrm{OA}:\boxed{\mathbf{F}}$$
$$= \mathrm{OB}:\boxed{\mathbf{G}}$$

が成り立つ。よって，OA : OB ＝ $\boxed{\mathbf{F}}$: $\boxed{\mathbf{G}}$ である。

(3)　したがって，AP ＝ $\boxed{\mathbf{H}}\sqrt{\boxed{\mathbf{I}}}$ である。また，∠AOP ＝ $\boxed{\mathbf{JK}}^\circ$ であるから，OP ＝ $\boxed{\mathbf{L}}$ となる。よって

$$\mathrm{PQ}=\boxed{\mathbf{M}}+\boxed{\mathbf{N}}\sqrt{\boxed{\mathbf{O}}}$$

である。

注）二等分線：bisector，外角：exterior angle

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 **P** ～ **Z** はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

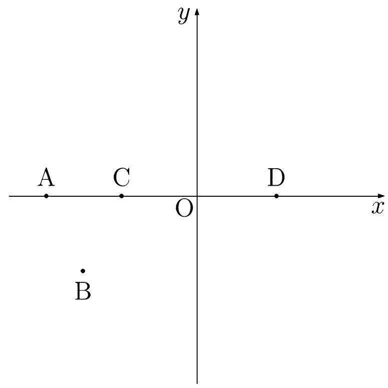
選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 つの放物線

$$\ell: \quad y = ax^2 + 2bx + c$$
$$m: \quad y = (a+1)x^2 + 2(b+2)x + c + 3$$

を考える。点 A, B, C, D が右図のような位置関係にあるとする。このとき，この 2 つの放物線のうち，一方は，3 点 A, B, C を通り，もう一方は，3 点 B, C, D を通るとする。



(1)　3 点 A, B, C を通る放物線は $\boxed{\text{A}}$ である。ただし，$\boxed{\text{A}}$ には，次の ⓪ か ① のどちらか適するものを選びなさい。

⓪　放物線 ℓ　　　①　放物線 m

(2)　2 つの放物線 ℓ, m は，どちらも 2 点 B, C を通るので，点 B, C の x座標は，2 次方程式

$$x^2 + \boxed{\text{B}}\,x + \boxed{\text{C}} = 0$$

の解である。よって，点 B の x座標は $\boxed{\text{DE}}$，点 C の x座標は $\boxed{\text{FG}}$ である。

(3)　特に，AB = BC，CO = OD のとき，a, b, c の値を求めよう。

2 点 C, D は y軸に関して対称であるから，$b = \boxed{\text{H}}$ である。また，AB = BC より，直線 $x = \boxed{\text{IJ}}$ が $\boxed{\text{A}}$ の軸である。したがって，$a = -\dfrac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}$ である。よって，$c = \dfrac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}$ である。

注）対称：symmetry

- 計算欄 (memo) -

問 2　2 つの袋 A, B がある。A の袋には白球が 4 個，赤球が 1 個入っており，B の袋には白球が 2 個，赤球が 3 個入っている。はじめに A の袋から同時に 2 個の球を取り出し，続いて，B の袋から同時に 2 個の球を取り出す。

(1)　A から 2 個の白球を取り出し，B からは白球と赤球をそれぞれ 1 個ずつ取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{PQ}}}$ である。

(2)　取り出した 4 個の球の中に，3 個の白球と 1 個の赤球が入っている確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{R}}}{\boxed{\mathsf{S}}}$ である。

(3)　取り出した 4 個の球がすべて同じ色である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{T}}}{\boxed{\mathsf{UV}}}$ である。

(4)　取り出した 4 個の球の中に含まれる白球が 2 個以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{WX}}}{\boxed{\mathsf{YZ}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。

II

問 1　2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角は $60°$ であり，$\left|\overrightarrow{a}\right| = 1$，$\left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ とする。また，実数 x に対して，$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ とする。$x > 1$ のとき，$\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ のなす角が $30°$ となるような x の値を求めよう。以下，$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ は $\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ の内積を表し，$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を表す。

まず，ベクトル $\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ のなす角は $30°$ であるから

$$\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)^2 = \frac{\boxed{\textbf{A}}}{\boxed{\textbf{B}}} \left|\overrightarrow{u}\right|^2 \left|\overrightarrow{v}\right|^2$$

を得る。$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \boxed{\textbf{C}}$ であることに注意して，この式を x で表すと

$$x^4 - \boxed{\textbf{DE}}\, x^2 + \boxed{\textbf{FG}} = 0$$

となる。これを変形して

$$\left(x^2 - \boxed{\textbf{H}}\right)^2 = \left(\boxed{\textbf{I}}\, x\right)^2$$

を得る。

したがって，$x > 1$ に注意して，これを解くと

$$x = \boxed{\textbf{J}} + \sqrt{\boxed{\textbf{KL}}}$$

となる。

注） 内積：inner product

- 計算欄 (memo) -

問 2　複素数平面上で，z^3 が実数となるような複素数 z を考える。

(1)　上の条件を満たす複素数 $z=x+iy$ が描く図形を C とする。その複素数 z の偏角は

$$\arg z = \frac{\pi}{\boxed{\mathrm{M}}}k \quad (k\text{ は整数})$$

を満たすので，図形 C は x, y の方程式

$$y=\boxed{\mathrm{N}},\quad y=\sqrt{\boxed{\mathrm{O}}}\,x,\quad y=-\sqrt{\boxed{\mathrm{P}}}\,x$$

で表される 3 直線である。

(2)　C 上に $|z-1-i|=r$ を満たす複素数 z がただ 1 個だけ存在するとする。このとき，r の値は

$$r = \frac{\sqrt{\boxed{\mathrm{Q}}}-\boxed{\mathrm{R}}}{\boxed{\mathrm{S}}}$$

となる。また，そのときの z の値は

$$z = \frac{\boxed{\mathrm{T}}+\sqrt{\boxed{\mathrm{U}}}}{\boxed{\mathrm{V}}}\left(1+\sqrt{\boxed{\mathrm{W}}}\,i\right)$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{X}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

3 次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{t+2}{2}x^2 + 2tx + \frac{2}{3}$$

の区間 $x \leqq 4$ における最大値が 6 より大きくなるような実数 t の値の範囲を求めよう。

まず，$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = (x - \boxed{\mathsf{A}})(x - t)$$

であるから，t の値の範囲を次のように分けて考える。

(i)　$t > \boxed{\mathsf{A}}$ のとき，$f(x)$ は $x = \boxed{\mathsf{A}}$ で極大，$x = t$ で極小となる。
また，$f(4) = \boxed{\mathsf{B}}$ であるから，$f(\boxed{\mathsf{A}}) > 6$ となる t の値の範囲を求めればよい。

(ii)　$t = \boxed{\mathsf{A}}$ のとき，区間 $x \leqq 4$ における $f(x)$ の最大値は $f(\boxed{\mathsf{C}}) = \boxed{\mathsf{D}}$ となり，条件は満たされない。

(iii)　$t < \boxed{\mathsf{A}}$ のとき，$f(x)$ は $x = t$ で極大，$x = \boxed{\mathsf{A}}$ で極小となる。
また，$f(4) = \boxed{\mathsf{B}}$ であるから，$f(t) > 6$ となる t の値の範囲を求めればよい。

ここで

$$f(t) - 6 = -\frac{1}{6}\left(t + \boxed{\mathsf{E}}\right)\left(t - \boxed{\mathsf{F}}\right)^2$$

であることに注意する。

以上より，求める t の値の範囲は

$$t > \frac{\boxed{\mathsf{GH}}}{\boxed{\mathsf{I}}} \quad \text{または} \quad t < \boxed{\mathsf{JK}}$$

である。

注）導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{L}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

関数

$$f(x) = \frac{\sin x}{3 - 2\cos x} \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

を考える。

(1)　$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \frac{\boxed{\mathbf{A}}\cos x - \boxed{\mathbf{B}}}{\left(\boxed{\mathbf{C}} - \boxed{\mathbf{D}}\cos x\right)^2}$$

である。したがって，関数 $f(x)$ が極値をとる x の値を α とおくと

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{\mathbf{E}}}{\boxed{\mathbf{F}}}$$

である。

(2)　関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸によって囲まれる部分は直線 $x = \alpha$ によって 2 つの部分に分けられる。その左側の部分の面積を S_1 とおくと

$$S_1 = \int_{\frac{\boxed{\mathbf{G}}}{\boxed{\mathbf{H}}}}^{\boxed{\mathbf{I}}} \frac{dt}{\boxed{\mathbf{J}} - \boxed{\mathbf{K}}\,t} = \frac{\boxed{\mathbf{L}}}{\boxed{\mathbf{M}}}\log\frac{\boxed{\mathbf{N}}}{\boxed{\mathbf{O}}}$$

である。

　また，右側の部分の面積を S_2 とおくと

$$S_2 = \frac{\boxed{\mathbf{P}}}{2}\log\boxed{\mathbf{Q}}$$

である。

注）導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{R}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。