平成28年度（2016年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆（ＨＢ）で記入してください。
2．問題文中の**A**，**B**，**C**，… には，それぞれ－（マイナスの符号），または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。
3．同一の問題文中に $\boxed{\textbf{A}}$，$\boxed{\textbf{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\textbf{A}}\sqrt{\boxed{\textbf{B}}}}{\boxed{\textbf{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\textbf{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受 験 番 号			＊					＊					
名　　　前													

数学 コース 1
（基本コース）

（コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　x の 2 次関数

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + ax + b \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。関数 ① のグラフの頂点の座標を (p, q) とすると

$$p = \boxed{\mathbf{A}}\,a, \quad q = \boxed{\mathbf{B}}\,a^2 + b$$

である。

(1)　点 (p, q) が直線 $x + y = 1$ の上を動くとき，a, b は

$$b = \boxed{\mathbf{CD}}\,a^2 - \boxed{\mathbf{E}}\,a + \boxed{\mathbf{F}}$$

を満たす。

このとき，$8a + b$ は $a = \boxed{\mathbf{G}}$ で最大値 $\boxed{\mathbf{H}}$ をとる。

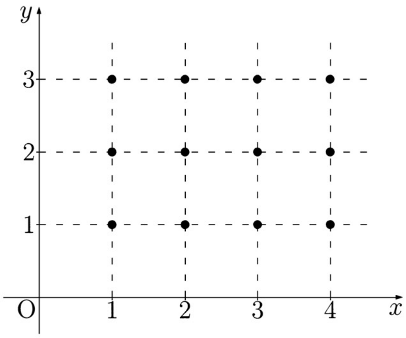
(2)　関数 ① のグラフが x 軸に接するとき，$a + b$ の値の範囲は

$$a + b \leqq \frac{\boxed{\mathbf{I}}}{\boxed{\mathbf{J}}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　座標平面上に，右の図のように 12 個の点が並んでいる。これらの点から 3 個の点を選び，それらを頂点とする三角形を作る。このとき，三角形が全部で何個できるかを調べよう。



まず，12 個の点から 3 個の点を選び出す場合の数は $\boxed{\mathsf{KLM}}$ 通りである。

次に，12 個の点のうち，3 個以上が一直線上に並ぶ場合の数を数えよう。

このような直線のうち

(i)　4 点を通る直線は $\boxed{\mathsf{N}}$ 本ある。

(ii)　3 点を通る直線は $\boxed{\mathsf{O}}$ 本ある。

したがって，同一直線上にあり，三角形の頂点とならない 3 点の組み合わせは，(i) の場合は $\boxed{\mathsf{PQ}}$ 通りあり，(ii) の場合は $\boxed{\mathsf{R}}$ 通りある。

以上より，求める三角形は $\boxed{\mathsf{STU}}$ 個である。

特に，点 $(1,1)$ を A，点 $(4,1)$ を B とするとき，線分 AB 上に 2 つの頂点をもつ三角形は $\boxed{\mathsf{VW}}$ 個である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{X}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　$15x^2-2xy-8y^2-11x+22y+a$ が $x,\ y$ の 1 次式の積に因数分解できるような a の値を求めよう。

上の式の $x,\ y$ に関する 2 次の項の部分は

$$15x^2-2xy-8y^2=\left(\boxed{\mathsf{A}}\,x-\boxed{\mathsf{B}}\,y\right)\left(\boxed{\mathsf{C}}\,x+\boxed{\mathsf{D}}\,y\right)$$

と因数分解される。

したがって

$$\begin{aligned}&15x^2-2xy-8y^2-11x+22y+a\\&=\left(\boxed{\mathsf{A}}\,x-\boxed{\mathsf{B}}\,y+b\right)\left(\boxed{\mathsf{C}}\,x+\boxed{\mathsf{D}}\,y+c\right)\quad\cdots\cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

とおくとき，等式 ① の右辺は

$$15x^2-2xy-8y^2+\left(\boxed{\mathsf{E}}\,b+\boxed{\mathsf{F}}\,c\right)x+\left(\boxed{\mathsf{G}}\,b-\boxed{\mathsf{H}}\,c\right)y+bc$$

と展開できる。この式の係数と等式 ① の左辺の係数を比較すると

$$b=\boxed{\mathsf{I}},\quad c=-\boxed{\mathsf{J}}$$

であり，$a=-\boxed{\mathsf{KL}}$ が得られる。

注）因数分解する：factorize

- 計算欄 (memo) -

問 2 $a+9$ が 7 の倍数，$a+8$ が 13 の倍数となる 2 桁(けた)の自然数 a を求めよう。

$a+9$, $a+8$ は自然数 m, n を用いて

$$a+9 = \boxed{\text{M}}\,m, \quad a+8 = \boxed{\text{NO}}\,n$$

と表される。この 2 つの式から

$$\boxed{\text{M}}\,m - \boxed{\text{NO}}\,n = \boxed{\text{P}} \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を得る。$m = \boxed{\text{Q}}$，$n = \boxed{\text{R}}$ は ① の整数解の 1 組であるから

$$\boxed{\text{M}}\left(m - \boxed{\text{Q}}\right) = \boxed{\text{NO}}\left(n - \boxed{\text{R}}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立つ。② より，① を満たす自然数 n は

$$n = \boxed{\text{S}}\,k + \boxed{\text{T}} \quad (k \text{ は整数})$$

と表される。

したがって

$$a = \boxed{\text{UV}}\,k + \boxed{\text{W}}$$

であるから，求める 2 桁の自然数 a は $\boxed{\text{XY}}$ である。

注） 2 桁：two-digit

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

2 つの関数

$$f(x) = x^2 + 2ax + 4a - 3$$
$$g(x) = 2x + 1$$

を考える。

すべての x に対して $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つための a に関する条件を求めよう。また，その条件のもとで，$f(x)$ の最小値がとる値の範囲を求めよう。

すべての x に対して

$$x^2 + \boxed{\mathbf{A}}\left(a - \boxed{\mathbf{B}}\right)x + \boxed{\mathbf{C}}a - \boxed{\mathbf{D}} \geqq 0$$

が成り立つための条件を求めればよい。

次の文中の $\boxed{\mathbf{E}}$ ～ $\boxed{\mathbf{H}}$ にはそれぞれ，各設問の下の ⓪ ～ ⑦ の中から適するものを選びなさい。

(1) その条件は，a が 2 次不等式 $\boxed{\mathbf{E}}$ を満たすことである。よって，a が $\boxed{\mathbf{F}}$ の範囲にあることである。

⓪ $a^2 - 5a + 4 \geqq 0$　① $a^2 - 6a + 5 \geqq 0$　② $a^2 - 5a + 4 \leqq 0$

③ $a^2 - 6a + 5 \leqq 0$　④ $a \leqq 1$ または $5 \leqq a$　⑤ $1 \leqq a \leqq 5$

⑥ $1 \leqq a \leqq 4$　⑦ $a \leqq 1$ または $4 \leqq a$

(2) $f(x)$ の最小値を m とする。このとき，$m = \boxed{\mathbf{G}}$ であるから，(1) で求めた条件のもとで，m がとる値の範囲は $\boxed{\mathbf{H}}$ である。

⓪ $a^2 + 4a - 3$　① $4a^2 + 4a - 3$　② $-a^2 + 4a - 3$

③ $2a^2 - 4a + 3$　④ $-5 \leqq m \leqq 1$　⑤ $-8 \leqq m \leqq 1$

⑥ $-8 \leqq m \leqq -1$　⑦ $-5 \leqq m \leqq -1$

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{III}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{I}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

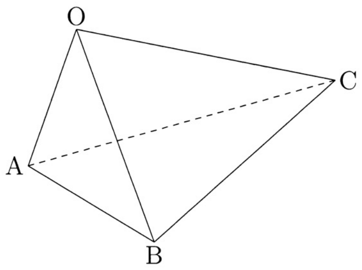
IV

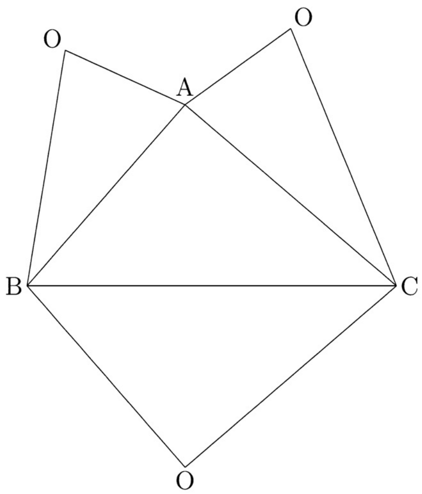
下の右図は，四面体 OABC の展開図である。四面体 OABC において

$$\mathrm{BC} = 10, \quad \mathrm{AC} = 8, \quad \sin\angle\mathrm{ACB} = \frac{3}{4}$$

$$\mathrm{OA} = 4, \quad \triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{OBC}$$

が成り立つとする。





(1)　三角形 ABC の面積は $\boxed{\mathbf{AB}}$ である。

(2)　点 A から辺 BC におろした垂線を AH とすると，AH の長さは $\boxed{\mathbf{C}}$ である。

(3)　平面 ABC と平面 OBC のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\boxed{\mathbf{D}}}{\boxed{\mathbf{E}}}, \quad \sin\theta = \frac{\boxed{\mathbf{F}}\sqrt{\boxed{\mathbf{G}}}}{\boxed{\mathbf{H}}}$$

である。

(4)　四面体 OABC の体積は $\dfrac{\boxed{\mathbf{IJ}}\sqrt{\boxed{\mathbf{K}}}}{\boxed{\mathbf{L}}}$ である。

注）展開図：net

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{M}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　x の 2 次関数

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + ax + b \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。関数 ① のグラフの頂点の座標を (p, q) とすると

$$p = \boxed{\mathbf{A}}\,a, \quad q = \boxed{\mathbf{B}}\,a^2 + b$$

である。

(1)　点 (p, q) が直線 $x + y = 1$ の上を動くとき，a, b は

$$b = \boxed{\mathbf{CD}}\,a^2 - \boxed{\mathbf{E}}\,a + \boxed{\mathbf{F}}$$

を満たす。

このとき，$8a + b$ は $a = \boxed{\mathbf{G}}$ で最大値 $\boxed{\mathbf{H}}$ をとる。

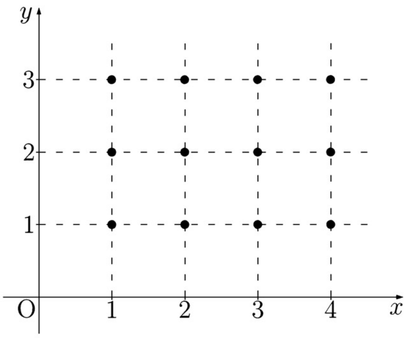
(2)　関数 ① のグラフが x 軸に接するとき，$a + b$ の値の範囲は

$$a + b \leqq \frac{\boxed{\mathbf{I}}}{\boxed{\mathbf{J}}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　座標平面上に，右の図のように 12 個の点が並んでいる。これらの点から 3 個の点を選び，それらを頂点とする三角形を作る。このとき，三角形が全部で何個できるかを調べよう。



まず，12 個の点から 3 個の点を選び出す場合の数は $\boxed{\text{KLM}}$ 通りである。

次に，12 個の点のうち，3 個以上が一直線上に並ぶ場合の数を数えよう。

このような直線のうち

(i)　4 点を通る直線は $\boxed{\text{N}}$ 本ある。

(ii)　3 点を通る直線は $\boxed{\text{O}}$ 本ある。

したがって，同一直線上にあり，三角形の頂点とならない 3 点の組み合わせは，(i) の場合は $\boxed{\text{PQ}}$ 通りあり，(ii) の場合は $\boxed{\text{R}}$ 通りある。

以上より，求める三角形は $\boxed{\text{STU}}$ 個である。

特に，点 $(1, 1)$ を A，点 $(4, 1)$ を B とするとき，線分 AB 上に 2 つの頂点をもつ三角形は $\boxed{\text{VW}}$ 個である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{X}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　三角形 ABC は

$$AB=2,\quad BC=3,\quad CA=4$$

を満たしている。

(1)　$\angle ABC=\theta$ とおくと，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{BC}$ の内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ は

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \boxed{\mathbf{AB}}\cos\theta$$

である。また，余弦定理より $\cos\theta$ の値を求めて

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{\boxed{\mathbf{C}}}{\boxed{\mathbf{D}}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を得る。

(2)　辺 BC を n 等分する点を B から近い順に $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ とおき，$B=P_0, C=P_n$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{AP_{k-1}}\cdot\overrightarrow{AP_k}$ を求めよう。

まず，$\overrightarrow{AP_{k-1}}$ と $\overrightarrow{AP_k}$ の内積を ① を用いて計算すると

$$\overrightarrow{AP_{k-1}}\cdot\overrightarrow{AP_k} = \boxed{\mathbf{E}} + \frac{\boxed{\mathbf{F}}\,k-\boxed{\mathbf{G}}}{2n} + \frac{\boxed{\mathbf{H}}\,(k^2-k)}{n^2}$$

である。

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{AP_{k-1}}\cdot\overrightarrow{AP_k} = \frac{\boxed{\mathbf{IJ}}}{\boxed{\mathbf{K}}}$$

となる。

注）内積：inner product，余弦定理：the law of cosines

- 計算欄 (memo) -

問 2　複素数 z が条件

$$z\bar{z}-(1-2i)z-(1+2i)\bar{z} \leqq 15 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たすとする。

(1)　複素数平面上で不等式 ① が表す図形は，中心 $\boxed{\mathsf{L}}+\boxed{\mathsf{M}}\,i$，半径 $\boxed{\mathsf{N}}\sqrt{\boxed{\mathsf{O}}}$ の円の内部および円周である。

(2)　直線 $(1-i)z-(1+i)\bar{z}=2i$ 上にあり，不等式 ① を満たすすべての複素数 z の中で，$|z|$ が最大であるものを z_1，$|z|$ が最小であるものを z_2 と表すと

$$z_1 = \sqrt{\boxed{\mathsf{PQ}}}+\boxed{\mathsf{R}}+\left(\sqrt{\boxed{\mathsf{ST}}}+\boxed{\mathsf{U}}\right)i,$$

$$z_2 = -\frac{\boxed{\mathsf{V}}}{\boxed{\mathsf{W}}}+\frac{\boxed{\mathsf{X}}}{\boxed{\mathsf{Y}}}\,i$$

である。

注）複素数：complex number，複素数平面：complex number plane

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

次の 4 つの条件を満たす実数 x, y, t, u を考える。

$$y \geqq |x| \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$x + y = t \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

$$x^2 + y^2 = 12 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

$$x^3 + y^3 = u \quad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

このとき，t および u がとる値の範囲を求めよう。

(1)　①, ③ より，点 (x, y) は原点を中心とする半径 $\boxed{\mathbf{A}}\sqrt{\boxed{\mathbf{B}}}$ の四分円の弧の上にあり，弧の両端の点の座標は

$$\left(\sqrt{\boxed{\mathbf{C}}}, \sqrt{\boxed{\mathbf{D}}}\right), \quad \left(-\sqrt{\boxed{\mathbf{C}}}, \sqrt{\boxed{\mathbf{D}}}\right)$$

である。このことと ② より，t がとる値の範囲は

$$\boxed{\mathbf{E}} \leqq t \leqq \boxed{\mathbf{F}}\sqrt{\boxed{\mathbf{G}}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ⑤$$

である。

(2)　次に ②, ③ より

$$xy = \frac{\boxed{\mathbf{H}}}{\boxed{\mathbf{I}}}\left(t^2 - \boxed{\mathbf{JK}}\right)$$

を得る。さらに，④ を用いて

$$u = \frac{\boxed{\mathbf{L}}}{\boxed{\mathbf{M}}}\left(\boxed{\mathbf{NO}}\,t - t^3\right)$$

を得る。

したがって

$$\frac{du}{dt} = \frac{\boxed{\mathbf{P}}}{\boxed{\mathbf{Q}}}\left(\boxed{\mathbf{RS}} - t^2\right)$$

であるから，⑤ の範囲において u がとる値の範囲は

$$\boxed{\mathbf{T}} \leqq u \leqq \boxed{\mathbf{UV}}\sqrt{\boxed{\mathbf{W}}}$$

である。

注）四分円：quadrant，弧：arc

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{X}}$ 〜 $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

$a>1$ とする。2 つの不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leqq y \leqq a\cos 3x$$

で表される領域を直線 $y=1$ で 2 つの部分に分ける。そのうち，$y \geqq 1$ の部分の面積を S，$y \leqq 1$ の部分の面積を T とおく。このとき，$T-S$ を最大にする a の値と，$T-S$ の最大値を求めよう。

等式 $a\cos 3x = 1$ を満たす $x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}\right)$ の値を t とおく。このとき

$$S = \frac{\sin 3t}{\boxed{\text{A}}\cos 3t} - t$$

$$S+T = \frac{1}{\boxed{\text{B}}\cos 3t}$$

である。したがって，$f(t)=T-S$ とおくと

$$f'(t) = \frac{\left(\boxed{\text{C}} - \boxed{\text{D}}\sin 3t\right)\sin 3t}{\cos^{\boxed{\text{E}}} 3t}$$

であるから，$T-S$ は $t=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{FG}}}$ のとき最大となる。すなわち，$a=\dfrac{\boxed{\text{H}}\sqrt{\boxed{\text{I}}}}{\boxed{\text{J}}}$ のとき，$T-S$ は最大値 $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{K}}}$ をとる。

注） 領域：region

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{L}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\mathrm{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。