平成28年度（2016年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　**試験全体に関する注意**

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　**問題冊子に関する注意**

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　**解答方法に関する注意**

1．解答は，解答用紙に鉛筆（ＨＢ）で記入してください。

2．問題文中の**A**，**B**，**C**，… には，それぞれ－（マイナスの符号），または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊					
名　　前													

数学 コース 1
（基本コース）

（コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。関数 ① は $x = 1$ のとき最大値 16 をとり，そのグラフは x 軸と 2 点で交わり，その 2 点を結ぶ線分の長さを 8 とする。このとき，a, b, c の値を求めよう。

条件より，① は

$$y = a(x - \boxed{\mathsf{A}})^2 + \boxed{\mathsf{BC}}$$

と表すことができる。また，① のグラフと x 軸が交わる 2 点の座標は

$$\left(-\boxed{\mathsf{D}}, 0\right), \quad \left(\boxed{\mathsf{E}}, 0\right)$$

である。

したがって，$a = \boxed{\mathsf{FG}}$ である。よって

$$b = \boxed{\mathsf{H}}, \quad c = \boxed{\mathsf{IJ}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　箱の中に 0 から 9 までの数字が書かれたカードが，それぞれ 1 枚ずつ，計 10 枚入っている。この箱の中から 3 枚のカードを次の 2 通りの方法で取り出す。このとき，次の確率について考える。

(1)　3 枚のカードを同時に取り出す。このとき

(i)　3 枚のカードに書かれた数が，すべて 2 以上 6 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{K}}}{\boxed{\mathrm{LM}}}$ である。

(ii)　最も小さい数が 2 以下で，最も大きい数が 8 以上である確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{NO}}}{\boxed{\mathrm{PQ}}}$ である。

(2)　1 枚のカードを取り出し，数字を見てから元の箱に戻す試行を 3 回続ける。このとき，最も小さい数が 2 以上で，最も大きい数が 6 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{R}}}{\boxed{\mathrm{S}}}$ である。

注）試行：trial

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{T}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　n を自然数とし，a は $a \neq 0$ を満たす実数とする。整式 $x^n+y^n+z^n+a(xy+yz+zx)$ が，$x+y+z$ と，ある x, y, z の整式 P の積で表されるとする。すなわち

$$x^n+y^n+z^n+a(xy+yz+zx) = (x+y+z)P \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

とする。このとき，n, a の値を求めよう。

① はすべての x, y, z に対して成り立つ。そこで，例えば，$x+y+z=0$ となる x, y, z の組

$$x = y = 1, \qquad z = -\boxed{\mathsf{A}}$$

および

$$x = y = -\frac{\boxed{\mathsf{B}}}{\boxed{\mathsf{C}}}, \quad z = 1$$

を考える。これらの値を ① にそれぞれ代入して

$$\left(-\boxed{\mathsf{A}}\right)^n = \boxed{\mathsf{D}}\,a - \boxed{\mathsf{E}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

$$\left(-\frac{\boxed{\mathsf{B}}}{\boxed{\mathsf{C}}}\right)^n = \frac{\boxed{\mathsf{F}}}{\boxed{\mathsf{G}}}\,a - \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

を得る。② と ③ より

$$\left(\boxed{\mathsf{D}}\,a - \boxed{\mathsf{E}}\right)\left(\frac{\boxed{\mathsf{F}}}{\boxed{\mathsf{G}}}\,a - \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}\right) = \boxed{\mathsf{J}}$$

となる。これを解いて，$a = \boxed{\mathsf{K}}$ となり，② より，$n = \boxed{\mathsf{L}}$ を得る。

逆に，$a = \boxed{\mathsf{K}}$，$n = \boxed{\mathsf{L}}$ のとき，① が成り立つような P が存在するので，これが求める a, n の値であることが分かる。

- 計算欄 (memo) -

問 2　放物線 $y = x^2$ 上に両端をおく長さ 2 の線分 PQ を考える。線分 PQ の中点 M の中で，x 軸に最も近いものの座標を求めよう。

線分 PQ の両端の座標を $\mathrm{P}(p, p^2)$, $\mathrm{Q}(q, q^2)$ とおく。このとき，中点 M の y 座標 m は

$$m = \frac{p^2+q^2}{\boxed{\mathbf{M}}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

と表される。また，条件 PQ = 2 は三平方の定理を用いると

$$(p-q)^2 + (p^2-q^2)^2 = \boxed{\mathbf{N}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

となる。

ここで，$pq = t$ とおくと，① と ② より，m についての 2 次方程式

$$\boxed{\mathbf{O}}\,m^2 + m - \boxed{\mathbf{P}}\,t^2 - t - \boxed{\mathbf{Q}} = 0$$

を得る。これを m について解くと，$m > 0$ に注意して

$$m = -\frac{1}{\boxed{\mathbf{R}}} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{\boxed{\mathbf{S}}}\right)^2 + \boxed{\mathbf{T}}}$$

となる。これは，$t = -\dfrac{1}{\boxed{\mathbf{S}}}$ のとき，m が最小値をとることを示している。このとき，

$pq = -\dfrac{1}{\boxed{\mathbf{S}}}$ であり，$p^2 + q^2 = \dfrac{\boxed{\mathbf{U}}}{\boxed{\mathbf{V}}}$ であるから，$p + q = \pm\boxed{\mathbf{W}}$ である。

したがって，x 軸に最も近い M の座標は $\left(\pm\dfrac{1}{\boxed{\mathbf{X}}}, \dfrac{\boxed{\mathbf{Y}}}{\boxed{\mathbf{Z}}}\right)$ である。

注）　三平方の定理：the Pythagorean theorem

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。

III

(1)　次の問いに答えなさい。

(i)　a を整数とする。a を 5 で割ると 4 余る。このとき，a は

$$a = \boxed{\mathbf{A}}\,k + \boxed{\mathbf{B}} \qquad (k \text{ は整数})$$

と表される。したがって，a^2 を 5 で割ると余りは $\boxed{\mathbf{C}}$ である。

(ii)　3 進法の 3 桁(けた)で表される数 $120_{(3)}$ を 10 進法で表すと $\boxed{\mathbf{DE}}$ である。

また，3 進法の 3 桁で表される最大の自然数を 10 進法で表すと $\boxed{\mathbf{FG}}$ であり，最小の自然数を 10 進法で表すと $\boxed{\mathbf{H}}$ である。

(2)　次の文中の $\boxed{\mathbf{I}}$，$\boxed{\mathbf{J}}$ には，下の ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。
以下，a を整数，b を自然数とする。

(i)　「a を 5 で割ると余りは 4 である」は「a^2 を 5 で割ると余りは $\boxed{\mathbf{C}}$ である」ための $\boxed{\mathbf{I}}$。

(ii)　「b は $6 \leqq b \leqq 30$ を満たす」は「b を 3 進法で表すと 3 桁である」ための $\boxed{\mathbf{J}}$。

⓪　必要条件であるが，十分条件ではない
①　十分条件であるが，必要条件ではない
②　必要十分条件である
③　必要条件でも十分条件でもない

注）余り：remainder，3 進法：the base-3 system，3 桁：three-digit，
10 進法：the decimal system

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{III}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{K}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

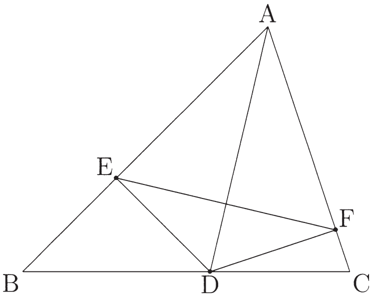
IV

$\angle BAC = 60^\circ$ の三角形 ABC を考える。

$\angle BAC$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とし，D から辺 AB, AC に引いた垂線をそれぞれ DE, DF とする。また

$$x = \frac{AB}{AC}, \quad k = \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$$

とおく。ただし，$\triangle ABC$ は三角形 ABC の面積を表す。他の三角形についても同様である。



(1)　k を x の式で表そう。$AB = b$, $AC = c$, $AD = d$ とすると，$\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ より

$$d = \frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{A}}}\,bc}{b+c} \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である。次に，$DE = DF = \dfrac{\boxed{\mathbf{B}}}{\boxed{\mathbf{C}}}d$ より

$$\triangle DEF = \frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{D}}}}{\boxed{\mathbf{EF}}}d^2 \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

である。①, ② より

$$k = \frac{d^2}{\boxed{\mathbf{G}}\,bc} = \frac{\boxed{\mathbf{H}}\,bc}{\boxed{\mathbf{I}}\,(b+c)^2}$$

である。ここで，$x = \dfrac{b}{c}$ であるから

$$k = \frac{\boxed{\mathbf{J}}\,x}{\boxed{\mathbf{K}}\,(x + \boxed{\mathbf{L}})^2}$$

となる。

(2)　$BD = 8$, $BC = 10$ のとき，$x = \boxed{\mathbf{M}}$，$k = \dfrac{\boxed{\mathbf{N}}}{\boxed{\mathbf{OP}}}$ である。

注）二等分線：bisector

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Q}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか,
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。関数 ① は $x = 1$ のとき最大値 16 をとり，そのグラフは x 軸と 2 点で交わり，その 2 点を結ぶ線分の長さを 8 とする。このとき，a, b, c の値を求めよう。

条件より，① は

$$y = a(x - \boxed{\mathbf{A}})^2 + \boxed{\mathbf{BC}}$$

と表すことができる。また，① のグラフと x 軸が交わる 2 点の座標は

$$\left(-\boxed{\mathbf{D}}, 0\right), \quad \left(\boxed{\mathbf{E}}, 0\right)$$

である。

したがって，$a = \boxed{\mathbf{FG}}$ である。よって

$$b = \boxed{\mathbf{H}}, \quad c = \boxed{\mathbf{IJ}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　箱の中に 0 から 9 までの数字が書かれたカードが，それぞれ 1 枚ずつ，計 10 枚入っている。この箱の中から 3 枚のカードを次の 2 通りの方法で取り出す。このとき，次の確率について考える。

(1)　3 枚のカードを同時に取り出す。このとき

(i)　3 枚のカードに書かれた数が，すべて 2 以上 6 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{K}}}{\boxed{\mathsf{LM}}}$ である。

(ii)　最も小さい数が 2 以下で，最も大きい数が 8 以上である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{NO}}}{\boxed{\mathsf{PQ}}}$ である。

(2)　1 枚のカードを取り出し，数字を見てから元の箱に戻す試行を 3 回続ける。このとき，最も小さい数が 2 以上で，最も大きい数が 6 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{R}}}{\boxed{\mathsf{S}}}$ である。

注）試行：trial

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{T}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

正の数からなる数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ は

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 10$$

$$(a_n)^2 a_{n-2} = (a_{n-1})^3 \quad (n = 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしている。このとき，$\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよう。

① の両辺の常用対数を考えて

$$\boxed{\mathsf{A}} \log_{10} a_n + \log_{10} a_{n-2} = \boxed{\mathsf{B}} \log_{10} a_{n-1}$$

を得る。いま，$b_n = \log_{10} a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくと，この式は

$$\boxed{\mathsf{A}}\, b_n + b_{n-2} = \boxed{\mathsf{B}}\, b_{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

となる。② を変形すると

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{\boxed{\mathsf{C}}} (b_{n-1} - b_{n-2}) \quad (n = 3, 4, \cdots)$$

となるから

$$b_n - b_{n-1} = \left(\frac{1}{\boxed{\mathsf{C}}} \right)^{n - \boxed{\mathsf{D}}} (b_2 - b_1) \quad (n = 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

が成り立つ。

（ II は次ページに続く）

注） 常用対数：common logarithm

ここで，$b_1 = \boxed{\mathsf{E}}$，$b_2 = \boxed{\mathsf{F}}$ であるから，③ より

$$b_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\boxed{\mathsf{C}}} \right)^{k-\boxed{\mathsf{G}}}$$

を得る。よって

$$b_n = \boxed{\mathsf{H}} - \left(\frac{1}{\boxed{\mathsf{C}}} \right)^{n-\boxed{\mathsf{I}}}$$

である。したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\mathsf{JKL}}$$

である。

$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{M}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

III

2 次方程式 $x^2+\sqrt{3}x+1=0$ の 2 つの解を α, β とする。ただし，$0<\arg\alpha<\arg\beta<2\pi$ である。このとき，次の 3 つの条件を満たす複素数 z を考える。

$$\begin{cases} \arg\dfrac{\alpha-z}{\beta-z}=\dfrac{\pi}{2} & \cdots\cdots\cdots ① \\ (1+i)z+(1-i)\overline{z}+k=0 & \cdots\cdots\cdots ② \\ \dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

ただし，k は実数とする。

また，複素数平面上で α, β, z を表す点をそれぞれ A, B, P とおく。

(1)　α, β の偏角は

$$\arg\alpha=\frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}\pi,\quad \arg\beta=\frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}\pi$$

である。

(2)　次の文中の $\boxed{\mathsf{E}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Q}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

① より，$\boxed{\mathsf{E}}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，点 P は中心 $-\dfrac{\sqrt{\boxed{\mathsf{F}}}}{\boxed{\mathsf{G}}}$，半径 $\dfrac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}$ の円周上にある。

また，② より，点 P は傾きが $\boxed{\mathsf{J}}$ であり，虚軸との交点が $\dfrac{\boxed{\mathsf{K}}}{\boxed{\mathsf{L}}}ki$ であるような直線の上にある。

以上より，①, ②, ③ を同時に満たす複素数 z の個数を n とすると，n の最大値は $\boxed{\mathsf{M}}$ であり，そのときの k の値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{N}}+\sqrt{\boxed{\mathsf{O}}}<k<\sqrt{\boxed{\mathsf{P}}}+\sqrt{\boxed{\mathsf{Q}}}$$

である。ただし，$\boxed{\mathsf{P}}<\boxed{\mathsf{Q}}$ とする。

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ 5	⑥ 6	⑦ ∠PAB	⑧ ∠PBA	⑨ ∠APB

注） 複素数：complex number，複素数平面：complex plane，偏角：argument，
虚軸：imaginary axis

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{R}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　x が不等式

$$2\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + 9\log_{\frac{1}{3}} x + 9 \leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たすとき，関数

$$f(x) = (\log_3 x)\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)\left(\log_3 \frac{x}{9}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

の最大値を求めよう。

① を満たす x の値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{A}}\sqrt{\boxed{\mathsf{B}}} \leqq x \leqq \boxed{\mathsf{CD}}$$

である。

ここで，$\log_3 x = t$ とおくと，t のとる値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}} \leqq t \leqq \boxed{\mathsf{G}}$$

である。

また，② の右辺を t で表して，その式が表す関数を $g(t)$ とおくと，その導関数は

$$g'(t) = \boxed{\mathsf{H}}\,t^2 - \boxed{\mathsf{I}}\,t + \boxed{\mathsf{J}}$$

である。したがって，$f(x)$ は $x = \boxed{\mathsf{KL}}$ で最大値 $\boxed{\mathsf{M}}$ をとる。

注） 導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

問 2　$a>0$ とする。曲線 $y=\sqrt{x}e^{-x}$ と x 軸および x 軸上の点 A$(a,0)$ を通る直線 $x=a$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V とする。

(1)　V は a の関数として

$$V=-\frac{\pi}{4}\left\{\left(\boxed{\mathsf{N}}\,a+\boxed{\mathsf{O}}\right)e^{-\boxed{\mathsf{P}}\,a}-\boxed{\mathsf{Q}}\right\}$$

と表される。

(2)　点 A は原点を出発して，x 軸上を正の方向に移動し，その t 秒後の速度を $4t$ とする。このとき，t 秒後の V の変化率を求めると

$$\frac{dV}{dt}=\boxed{\mathsf{R}}\,\pi t^{\boxed{\mathsf{S}}}\,e^{-\boxed{\mathsf{T}}\,t^{\boxed{\mathsf{U}}}}$$

である。また，この変化率が最も大きくなるのは

$$t=\frac{\sqrt{\boxed{\mathsf{V}}}}{4}$$

のときで，そのときの V の値は

$$V=-\frac{\pi}{8}\left(\boxed{\mathsf{W}}\,e^{-\frac{\boxed{\mathsf{X}}}{\boxed{\mathsf{Y}}}}-\boxed{\mathsf{Z}}\right)$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。