平成29年度（2017年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆（ＨＢ）で記入してください。

2．問題文中の**A**，**B**，**C**，… には，それぞれ－（マイナスの符号），または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\textsf{A}}$，$\boxed{\textsf{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\textsf{A}}$，$\boxed{\textsf{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\dfrac{2}{6}$ は $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ は $\dfrac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\textsf{A}}\sqrt{\boxed{\textsf{B}}}}{\boxed{\textsf{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\textsf{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊					
名　　前													

数学 コース 1
（基本コース）

（コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ◯ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 次関数

$$y = 3x^2 - 6$$

を考える。

(1)　$y = 3x^2 - 6$ のグラフを平行移動して，2 点 $(1, 5)$，$(4, 14)$ を通るようにする。このとき，このグラフを表す 2 次関数は

$$y = \boxed{\mathbf{A}}\,x^2 - \boxed{\mathbf{BC}}\,x + \boxed{\mathbf{DE}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。このグラフは，$y = 3x^2 - 6$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\mathbf{F}}$，y 軸方向に $\boxed{\mathbf{G}}$ 平行移動したものである。

(2)　直線 $y = c$ に関して $y = 3x^2 - 6$ のグラフと対称なグラフを表す 2 次関数は

$$y = -\boxed{\mathbf{H}}\,x^2 + \boxed{\mathbf{I}}\,c + \boxed{\mathbf{J}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

である。

2 次関数 ① と ② のグラフが共有点を 1 つだけもつとき，$c = \boxed{\mathbf{K}}$ であり，共有点の座標は $(\boxed{\mathbf{L}}, \boxed{\mathbf{M}})$ である。

注） 対称な：symmetric

- 計算欄 (memo) -

問 2　白いカードが 4 枚，赤いカードが 3 枚，黒いカードが 3 枚あり，これら 10 枚のカードにはすべて異なる数字が記されている。

(1)　10 枚のカードから 2 枚のカードを選び，それらを 2 つの箱 A, B に 1 枚ずつ入れる。この入れ方は全部で $\boxed{\mathsf{NO}}$ 通りある。

(2)　10 枚のカードから 2 枚のカードを選ぶ。2 枚とも同じ色となるような選び方は $\boxed{\mathsf{PQ}}$ 通りあり，2 枚の色が異なるような選び方は $\boxed{\mathsf{RS}}$ 通りある。

次に，この 10 枚のカードを 1 つの箱に入れ，その中からカードを 1 枚ずつ 2 度取り出す。ただし，最初に取り出したカードは箱に戻さないものとする。

(3)　取り出した 2 枚のカードが同じ色である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{T}}}{\boxed{\mathsf{UV}}}$ である。

(4)　最初に取り出したカードの色が白か赤であり，2 度目に取り出したカードの色が赤か黒である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{WX}}}{\boxed{\mathsf{YZ}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。

II

問 1　x の方程式

$$|x-3|+|x-6| = ax+b \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

が解をもつような実数 a, b について考えよう。

まず，① の左辺を $y=|x-3|+|x-6|$ とおいて，絶対値の記号を用いずに表すと

$x < \boxed{\mathbf{A}}$ のとき，　$y = -\boxed{\mathbf{B}}x + \boxed{\mathbf{C}}$

$\boxed{\mathrm{A}} \leqq x < \boxed{\mathbf{D}}$ のとき，　$y = \boxed{\mathbf{E}}$

$\boxed{\mathrm{D}} \leqq x$ のとき，　$y = \boxed{\mathbf{F}}x - \boxed{\mathbf{G}}$

となる。

次に，xy平面において，この関数のグラフと直線 $y=ax+b$ との共有点を考えると，次のことがわかる。

(i)　$a=1$ のとき，① が解をもつような b の値の範囲は $b \geqq \boxed{\mathbf{HI}}$ である。

(ii)　$b=6$ のとき，① が異なる 2 つの解をもつような a の値の範囲は $\boxed{\mathbf{JK}} < a < \boxed{\mathbf{L}}$ である。

注）　絶対値：absolute value

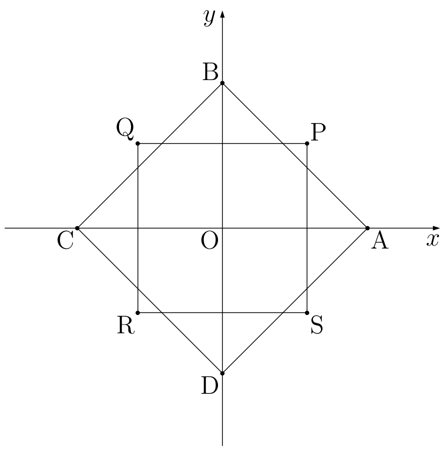
- 計算欄 (memo) -

問 2　右図のような2つの正方形を考える。頂点の座標を

A$(2t, 0)$,　B$(0, 2t)$,　C$(-2t, 0)$,　D$(0, -2t)$,
P$(4-t^2, 4-t^2)$,　Q$(-4+t^2, 4-t^2)$,
R$(-4+t^2, -4+t^2)$,　S$(4-t^2, -4+t^2)$

とする。ただし，$0 < t < 2$ である。

また，正方形 ABCD と正方形 PQRS の面積をそれぞれ S_1, S_2 とおく。



このとき

$$S_1 = \boxed{\mathbf{M}}\, t^2, \quad S_2 = \boxed{\mathbf{N}}\left(t^2 - \boxed{\mathbf{O}}\right)^2$$

である。

(1)　$S_1 + S_2$ は $t = \sqrt{\boxed{\mathbf{P}}}$ のとき最小値 $\boxed{\mathbf{QR}}$ をとる。

(2)　次の文中の $\boxed{\mathbf{W}}$, $\boxed{\mathbf{X}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選び，他の $\boxed{}$ には適する数を入れなさい。

$S_1 < S_2$ となる t の範囲を求めよう。

$S_1 < S_2$ とすると，t は不等式

$$t^4 - \boxed{\mathbf{ST}}\, t^2 + \boxed{\mathbf{UV}} > 0$$

を満たす。この不等式から，t^2 について $\boxed{\mathbf{W}}$ を得る。

したがって，$S_1 < S_2$ となるのは t が $\boxed{\mathbf{X}}$ を満たすときである。

⓪　$t^2 < 4$ または $6 < t^2$　①　$4 < t^2 < 6$　②　$t^2 < 2$ または $8 < t^2$

③　$2 < t^2 < 8$　④　$t^2 \neq 4$　⑤　$0 < t < 2$

⑥　$0 < t < \sqrt{2}$　⑦　$\sqrt{2} < t < 2$　⑧　$2 < t < \sqrt{6}$

⑨　$t \neq 2$

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Y}}$ ，$\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

n は正の整数，x, y は負でない整数とし，次の x, y の方程式を考える。

$$x^2 - y^2 = n \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

このとき，① の解を調べよう。

まず，① を変形して

$$(x+y)(x-y) = n \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を得る。

(1) $n=8$ および $n=9$ のとき，① の解 (x, y) を求めると

$n=8$ のとき，$(x, y) = (\boxed{\mathbf{A}}, \boxed{\mathbf{B}})$ であり，

$n=9$ のとき，$(x, y) = (\boxed{\mathbf{C}}, \boxed{\mathbf{D}}), (\boxed{\mathbf{E}}, \boxed{\mathbf{F}})$ である。

ただし，$\boxed{\mathrm{C}} < \boxed{\mathrm{E}}$ となるように答えなさい。

（III は次ページに続く）

(2)　次の文中の $\boxed{\mathbf{G}}$ ～ $\boxed{\mathbf{R}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

次の文章は，下の条件 ③ が，① が解をもつための必要十分条件であることの証明である。

証明　まず，(x, y) が ① を満たすとする。

x, y がともに偶数かともに奇数であれば，$x+y$ および $x-y$ は $\boxed{\mathbf{G}}$ である。よって，② より，n は $\boxed{\mathbf{H}}$ の倍数となる。

次に，x, y の一方が偶数で，他方が奇数であれば，$x+y$ および $x-y$ は $\boxed{\mathbf{I}}$ であるから，n は $\boxed{\mathbf{J}}$ である。

したがって

「n が $\boxed{\text{H}}$ の倍数か，または $\boxed{\text{J}}$ である。」　………　③

は，① が解をもつための必要条件である。

逆に，n が条件 ③ を満たすとする。

n が $\boxed{\text{H}}$ の倍数であれば，$n = \boxed{\text{H}}\,k$ (k は正の整数) と表される。そこで，例えば，$x+y = \boxed{\mathbf{K}}\,k$，$x-y = 2$ とすれば，$(x, y) = (k + \boxed{\mathbf{L}}, k - \boxed{\mathbf{M}})$ となるので，① は解をもつことになる。

また，n が $\boxed{\text{J}}$ であれば，$n = \boxed{\mathbf{N}}\,\ell + \boxed{\mathbf{O}}$ (ℓ は負でない整数) と表される。そこで，例えば，$x+y = \boxed{\mathbf{P}}\,\ell + \boxed{\mathbf{Q}}$，$x-y = 1$ とすれば，$(x, y) = (\ell + \boxed{\mathbf{R}}, \ell)$ となるので，① は解をもつことになる。

以上から，① が解をもつための必要十分条件は ③ である。

⓪　0　　①　1　　②　2　　③　3　　④　4　　⑤　5　　⑥　6
⑦　偶数　　⑧　奇数　　⑨　素数

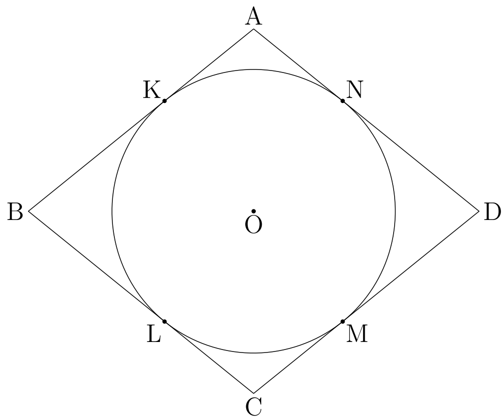
$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{S}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

$\boxed{\text{IV}}$

a は定数とする。1 辺の長さが a のひし形 ABCD を考える。

ひし形 ABCD の内接円 O の半径を r とし，図のように，円 O とひし形との接点をそれぞれ K, L, M, N とおく。また，ひし形からその内接円を除いた部分の面積を S とする。

このとき，r の値の範囲と，S の最大値を求めよう。



(1) 次の文中の $\boxed{\text{A}}$ ～ $\boxed{\text{C}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

$\angle\text{ABO} = \theta$ とおくと，OB $=$ $\boxed{\text{A}}$ であるから，OK $=$ $\boxed{\text{B}}$ である。したがって，$(\cos\theta - \sin\theta)^2 \geqq 0$ より，r のとる値の範囲は

$$0 < r \leqq \boxed{\text{C}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。

⓪	a	①	$\dfrac{a}{2}$	②	$\dfrac{a}{3}$		
③	$a\sin\theta$	④	$a\cos\theta$	⑤	$a\tan\theta$		
⑥	$a\sin^2\theta$	⑦	$a\cos^2\theta$	⑧	$a\sin\theta\cos\theta$	⑨	$a\tan^2\theta$

（$\boxed{\text{IV}}$ は次ページに続く）

注） ひし形：rhombus，内接円：inscribed circle

(2)　次の文中の $\boxed{\textbf{D}}$ ～ $\boxed{\textbf{F}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

面積 S を r を用いて表すと

$$S = \boxed{\textbf{D}}$$

である。ここで，$\boxed{\text{D}}$ の値を最大にする r の値 $\boxed{\textbf{E}}$ は，① を満たす。したがって，$r = \boxed{\text{E}}$ のとき，S は最大値 $\boxed{\textbf{F}}$ をとる。

⓪ $2ar - \pi r^2$　　① $ar - \dfrac{\pi}{2} r^2$　　② $\dfrac{a}{2} r - \pi r^2$　　③ $\dfrac{ar - \pi r^2}{2}$

④ $\dfrac{2a}{\pi}$　　⑤ $\dfrac{a}{\pi}$　　⑥ $\dfrac{a}{2\pi}$

⑦ $\dfrac{4a^2}{\pi}$　　⑧ $\dfrac{a^2}{\pi}$　　⑨ $\dfrac{a^2}{4\pi}$

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{G}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 次関数

$$y = 3x^2 - 6$$

を考える。

(1)　$y = 3x^2 - 6$ のグラフを平行移動して，2 点 $(1, 5)$，$(4, 14)$ を通るようにする。このとき，このグラフを表す 2 次関数は

$$y = \boxed{\mathbf{A}}\,x^2 - \boxed{\mathbf{BC}}\,x + \boxed{\mathbf{DE}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。このグラフは，$y = 3x^2 - 6$ のグラフを x軸方向に $\boxed{\mathbf{F}}$，y軸方向に $\boxed{\mathbf{G}}$ 平行移動したものである。

(2)　直線 $y = c$ に関して $y = 3x^2 - 6$ のグラフと対称なグラフを表す 2 次関数は

$$y = -\boxed{\mathbf{H}}\,x^2 + \boxed{\mathbf{I}}\,c + \boxed{\mathbf{J}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

である。

2 次関数 ① と ② のグラフが共有点を 1 つだけもつとき，$c = \boxed{\mathbf{K}}$ であり，共有点の座標は $(\boxed{\mathbf{L}}, \boxed{\mathbf{M}})$ である。

注）対称な：symmetric

- 計算欄 (memo) -

問 2　白いカードが 4 枚，赤いカードが 3 枚，黒いカードが 3 枚あり，これら 10 枚のカードにはすべて異なる数字が記されている。

(1)　10 枚のカードから 2 枚のカードを選び，それらを 2 つの箱 A, B に 1 枚ずつ入れる。この入れ方は全部で $\boxed{\mathsf{NO}}$ 通りある。

(2)　10 枚のカードから 2 枚のカードを選ぶ。2 枚とも同じ色となるような選び方は $\boxed{\mathsf{PQ}}$ 通りあり，2 枚の色が異なるような選び方は $\boxed{\mathsf{RS}}$ 通りある。

次に，この 10 枚のカードを 1 つの箱に入れ，その中からカードを 1 枚ずつ 2 度取り出す。ただし，最初に取り出したカードは箱に戻さないものとする。

(3)　取り出した 2 枚のカードが同じ色である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{T}}}{\boxed{\mathsf{UV}}}$ である。

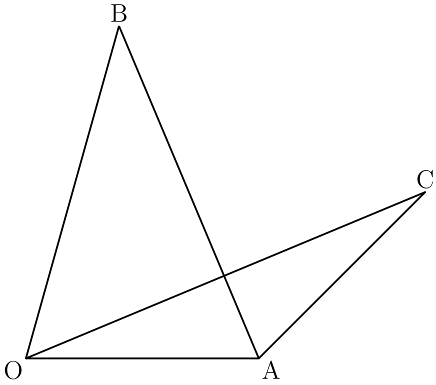
(4)　最初に取り出したカードの色が白か赤であり，2 度目に取り出したカードの色が赤か黒である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{WX}}}{\boxed{\mathsf{YZ}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。

II

問 1　右図のように，1 辺 OA を共有する三角形 OAB と三角形 OAC が，次の 2 つの条件を満たしているとする。



(i)　$\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

(ii)　三角形 OAC の重心 G は線分 AB 上にある

このとき，x の値を求め，$\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表そう。

線分 OC と線分 AB の交点を D とおくと

$$\overrightarrow{OD} = \frac{x}{\boxed{\mathbf{A}}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\mathbf{B}}}{\boxed{\mathbf{C}}}\overrightarrow{OB}$$

となる。また，D は線分 AB 上にあるので，$x = \dfrac{\boxed{\mathbf{D}}}{\boxed{\mathbf{E}}}$ を得る。

したがって

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\boxed{\mathbf{F}}}{\boxed{\mathbf{G}}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\mathbf{H}}}{\boxed{\mathbf{I}}}\overrightarrow{OB}$$

である。

特に，OA $= 1$，OB $= 2$，$\angle$AOB $= 60^\circ$ のとき，OG $= \dfrac{\sqrt{\boxed{\mathbf{JK}}}}{\boxed{\mathbf{L}}}$ となる。

注）　重心：center of gravity

- 計算欄 (memo) -

問 2　z は $|z|=2$ を満たす複素数とする。原点を O とする複素数平面上で $1+z$，$1-\frac{1}{2}z$ を表す点をそれぞれ A, B とおく。

まず，複素数 z は

$$z = \boxed{\mathbf{M}}\,(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (-\pi \leqq \theta < \pi)$$

と表すことができる。

(1)　z が実数でないとき，三角形 OAB の面積 S は $S=\boxed{\mathbf{N}}$ である。ただし，$\boxed{\mathrm{N}}$ には次の選択肢 ⓪ ～ ⑧ の中から適するものを選びなさい。

したがって，$\theta = \pm\dfrac{\boxed{\mathbf{O}}}{\boxed{\mathbf{P}}}\pi$ のとき S は最大になる。

⓪ $\frac{1}{2}\left\|\sin\left(\theta+\frac{1}{3}\pi\right)\right\|$	① $\frac{1}{2}\|\sin\theta\|$	② $\frac{1}{2}\left\|\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)\right\|$
③ $\left\|\sin\left(\theta+\frac{1}{3}\pi\right)\right\|$	④ $\|\sin\theta\|$	⑤ $\left\|\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)\right\|$
⑥ $\frac{3}{2}\left\|\sin\left(\theta+\frac{1}{3}\pi\right)\right\|$	⑦ $\frac{3}{2}\|\sin\theta\|$	⑧ $\frac{3}{2}\left\|\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)\right\|$

(2)　三角形 OAB が OA = OB である二等辺三角形となるとき

$$|1+z| = \left|1-\frac{1}{2}z\right| = \sqrt{\boxed{\mathbf{Q}}}$$

である。また，$-\pi \leqq \arg(1+z) < \pi$，$-\pi \leqq \arg\left(1-\frac{1}{2}z\right) < \pi$ とすると

$$\arg(1+z) = \pm\frac{\boxed{\mathbf{R}}}{\boxed{\mathbf{S}}}\pi,\quad \arg\left(1-\frac{1}{2}z\right) = \mp\frac{\boxed{\mathbf{T}}}{\boxed{\mathbf{U}}}\pi \quad (\text{複号同順})$$

である。

注） 複素数：complex number，複素数平面：complex plane

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{V}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

関数 $y = \dfrac{2^{x^2}}{5^{3x}}$ $(x \geqq 0)$ を考える。

(1)　y が最小になる x を求めよう。

y を微分して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2^{x^2}}{5^{3x}}\left(2x\log_e \boxed{\mathbf{A}} - \boxed{\mathbf{B}}\log_e \boxed{\mathbf{C}}\right)$$

を得る。

したがって，y が最小になる x の値を常用対数を用いて表すと

$$x = \frac{\boxed{\mathbf{D}}\left(1-\log_{10}\boxed{\mathbf{E}}\right)}{\boxed{\mathbf{F}}\log_{10}\boxed{\mathbf{G}}}$$

である。

(2)　$\dfrac{2^{x^2}}{5^{3x}} > 1000$ となるような最小の正の整数 x を求めよう。

不等式 $y > 1000$ より

$$x^{\boxed{\mathbf{H}}}\log_{10}\boxed{\mathbf{I}} - \boxed{\mathbf{J}}\,x\log_{10}\boxed{\mathbf{K}} - \boxed{\mathbf{L}} > 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を得る。$\log_{10} 2 = 0.301\cdots$ の近似値として 0.3 を用いて，不等式 ① を解くと

$$x > \frac{\boxed{\mathbf{M}} + \sqrt{\boxed{\mathbf{NO}}}}{\boxed{\mathbf{P}}}$$

を得る。

したがって，$y > 1000$ が成り立つような最小の正の整数 x は $\boxed{\mathbf{Q}}$ である。

注）常用対数：common logarithm，近似値：approximate value

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 **R** ～ **Z** はマークしないでください。

$\boxed{\text{IV}}$

区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で関数 $f(x) = x\sin^2 x$ を考える。曲線 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものを ℓ とする。ただし，ℓ は x 軸ではないとする。このとき，曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ で囲まれる部分の面積 S を求めよう。

(1)　次の文中の $\boxed{\textbf{A}}$ ～ $\boxed{\textbf{D}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ の接点を $(t, f(t))$ とおくと，ℓ は原点を通るので，等式 $\boxed{\textbf{A}}$ が成り立つ。さらに

$$f'(t) = \boxed{\textbf{B}} + 2t\boxed{\textbf{C}}$$

であるから，接点の x 座標は $t = \boxed{\textbf{D}}$ である。

⓪ $f(t) = tf'(t)$　　① $f'(t) = tf(t)$

② $\sin t$　　③ $\sin^2 t$　　④ $\cos^2 t$　　⑤ $\sin t\cos t$

⑥ $\dfrac{\pi}{2}$　　⑦ $\dfrac{\pi}{3}$　　⑧ $\dfrac{\pi}{4}$　　⑨ $\dfrac{\pi}{6}$

（$\boxed{\text{IV}}$ は次ページに続く）

(2)　次の文中の $\boxed{\mathbf{E}}$ ～ $\boxed{\mathbf{G}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

関数 $f(x)$ の不定積分は

$$\int f(x)\,dx = \boxed{\mathbf{E}}\left(2x^2 - 2x\boxed{\mathbf{F}} - \boxed{\mathbf{G}}\right) + C \quad (C\ は積分定数)$$

である。

⓪ $\dfrac{1}{8}$　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 2　④ 4　⑤ 8

⑥ $\sin x$　⑦ $\cos x$　⑧ $\sin 2x$　⑨ $\cos 2x$

(3)　曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{\mathbf{H}}}{\boxed{\mathbf{IJ}}}\pi^{\boxed{\mathbf{K}}} - \frac{\boxed{\mathbf{L}}}{\boxed{\mathbf{M}}}$$

である。

注）不定積分：antiderivative，積分定数：constant of integration

$\boxed{\mathrm{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{N}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\mathrm{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。