

数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に **A**, **BC** などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、**A**, **BC** のように表しています。

解答に関する記入上の注意

- (1) 根号($\sqrt{\quad}$)の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例： $\sqrt{32}$ のときは、 $2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ 、 $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)
- (3) $\frac{\sqrt{\mathbf{A}}\mathbf{B}}{\mathbf{C}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、下のようにマークしてください。
- (4) $\mathbf{DE}x$ に $-x$ と答える場合は、Dを－、Eを1とし、下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	○	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	○	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	○	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*				
名前											

数学 コース 1

(基本コース)

(コース2は 15 ページからです)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを 一つだけ 選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース1」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

数学-2

I

問 1 a を実数とし, 2 次関数

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - (2a - 1)x + a$$

について考える。

(1) $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{A}}a - \boxed{\text{B}}, -\boxed{\text{C}}a^2 + \boxed{\text{D}}a - \boxed{\text{E}} \right)$$

である。

(2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 2 点 A, B で交わるような a の値の範囲は

$$a < \frac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}, \quad \boxed{\text{H}} < a$$

である。

(3) (2) の 2 点 A, B で, それらの x 座標がともに 0 以上 6 以下となる a の値の範囲は

$$\boxed{\text{I}} < a \leq \frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{LM}}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

数学-4

問 2 大きさの異なる 4 枚のカードがある。これらのカードに赤, 黒, 青, 黄の色を塗る。ただし, どのカードにも 1 つの色のみを使い, また同じ色のカードが 2 枚以上あってもよいものとする。

- (1) 全部で **NOP** 通りの塗り方がある。
- (2) 全部の色を使う塗り方は **QR** 通りある。
- (3) 2 枚は赤で, 1 枚が黒, 1 枚が青となるような塗り方は **ST** 通りある。
- (4) 3 つの色を使う塗り方は **UVW** 通りある。
- (5) 2 つの色を使う塗り方は **XY** 通りある。

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わりです。I の解答欄 Z はマークしないでください。

II

問 1 $a^3 = 9 + \sqrt{80}$ を満たす正の数 a を求めよう。

$b^3 = 9 - \sqrt{80}$ を満たす正の数 b を追加して考える。

このとき

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = \boxed{\text{AB}} & \dots\dots\dots \text{①} \\ ab = \boxed{\text{C}} & \dots\dots\dots \text{②} \end{cases}$$

が成り立つ。

まず, ② を用いると ① は

$$(a+b)^3 - \boxed{\text{D}}(a+b) = \boxed{\text{AB}}$$

と変形できる。

ここで, $a+b=x$ とおくと

$$x^3 - \boxed{\text{D}}x = \boxed{\text{AB}}$$

となる。この式を変形して

$$x^3 - 27 = \boxed{\text{D}}(x - \boxed{\text{E}})$$

を得る。これより

$$(x - \boxed{\text{F}})(x^2 + \boxed{\text{G}}x + \boxed{\text{H}}) = 0$$

となる。

よって, $x = \boxed{\text{I}}$ となり

$$a+b = \boxed{\text{I}} \dots\dots\dots \text{③}$$

となる。

したがって, ②, ③ と $a > b$ より

$$a = \frac{\boxed{\text{J}} + \sqrt{\boxed{\text{K}}}}{\boxed{\text{L}}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

数学-8

問 2 a を 0 でない定数とし

$$f(x) = x^2 + 2ax - 4a - 12$$

$$g(x) = ax^2 + 2x - 4a + 4$$

とする。

(1) $f(x) = 0$ の解と $g(x) = 0$ の解が一致するとき、 a は **MN** である。また、そのとき、その解は $x =$ **OP** と $x =$ **Q** である。

(2) $g(x) = 0$ が重解をもつのは $a = \frac{\text{R}}{\text{S}}$ のときであり、そのときの解は $x =$ **TU** である。

(3) すべての x に対して、 $f(x) < g(x)$ が成り立つような a の値の範囲は

$$\text{V} \leq a < \text{WX}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

II の問題はこれで終わりです。II の解答欄 Y, Z はマークしないでください。

III

n は 2 桁^{けた}の自然数であり、 n^3 を 66 で割ったときの余りは n であるという。このような n の個数と、このような n のうち素数であるものを求めよう。

条件より、 n^3 を 66 で割ったときの商を p とすると

$$n^3 = \boxed{\text{AB}}p + n \quad (0 < n \leq \boxed{\text{CD}})$$

と表せる。これを変形して

$$n(n-1)(n+1) = \boxed{\text{AB}}p$$

を得る。

ここで、 $n-1, n$ のどちらか一方は $\boxed{\text{E}}$ の倍数、 $n-1, n, n+1$ のうち 1 つは $\boxed{\text{F}}$ の倍数であり、 $\boxed{\text{E}}$ と $\boxed{\text{F}}$ は互いに素であるから、 $n(n-1)(n+1)$ は $\boxed{\text{G}}$ の倍数である。ただし、 $1 < \boxed{\text{E}} < \boxed{\text{F}} < \boxed{\text{G}}$ とする。よって、 $n-1, n, n+1$ のいずれか 1 つが $\boxed{\text{HI}}$ の倍数となる場合を考えればよい。

いま、 $n \leq \boxed{\text{CD}}$ であるから、 $n-1$ が $\boxed{\text{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\text{J}}$ 、 n が $\boxed{\text{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\text{K}}$ 、 $n+1$ が $\boxed{\text{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\text{L}}$ である。

よって、求める n の個数は $\boxed{\text{MN}}$ であり、このうち、素数である n は小さい順に $\boxed{\text{OP}}$ 、 $\boxed{\text{QR}}$ 、 $\boxed{\text{ST}}$ である。

注) 2 桁の自然数: 2-digit natural number, 商: quotient, 互いに素: mutually prime (co-prime)

- 計算欄 (memo) -

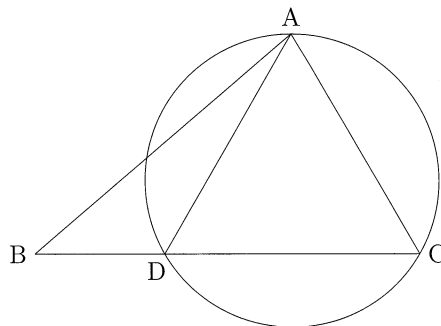
III の問題はこれで終わります。III の解答欄 U ～ Z はマークしないでください。

IV

右図の三角形 ABC は

$$AB = 4, \quad AC = 3, \quad \angle B = 30^\circ$$

を満たしている。辺 BC 上に $AC = AD$ となる点 D をとり、三角形 ACD の外接円 O を考える。



(1) $\sin B = \frac{\boxed{A}}{\boxed{B}}$ であるから、 $\sin C = \frac{\boxed{C}}{\boxed{D}}$ である。

したがって、円 O の半径は $\frac{\boxed{E}}{\boxed{F}}$ である。

(2) $BC = \boxed{G}\sqrt{\boxed{H}} + \sqrt{\boxed{I}}$, $BD = \boxed{J}\sqrt{\boxed{K}} - \sqrt{\boxed{L}}$ である。

また、辺 AB と円 O の交点を E とおくと

$$BE = \frac{\boxed{M}}{\boxed{N}}$$

である。したがって、三角形 BDE, 三角形 ADE, 三角形 ACD の面積について

$$\triangle BDE : \triangle ADE = \boxed{O} : \boxed{P}$$

$$\triangle BDE : \triangle ACD = \boxed{Q} \left(\boxed{J}\sqrt{\boxed{K}} - \sqrt{\boxed{L}} \right) : \boxed{RS}\sqrt{\boxed{T}}$$

が成り立つ。

注) 外接円 : circumscribed circle

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 U ~ Z はマークしないでください。

コース1の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の V はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース1」が正しくマークしてあるか、
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px; display: inline-block;"> コース 2 Course 2 </div>
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1 a を実数とし、2 次関数

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - (2a-1)x + a$$

について考える。

(1) $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{A}}a - \boxed{\text{B}}, -\boxed{\text{C}}a^2 + \boxed{\text{D}}a - \boxed{\text{E}} \right)$$

である。

(2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 2 点 A, B で交わるような a の値の範囲は

$$a < \frac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}, \quad \boxed{\text{H}} < a$$

である。

(3) (2) の 2 点 A, B で、それらの x 座標がともに 0 以上 6 以下となる a の値の範囲は

$$\boxed{\text{I}} < a \leq \frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{LM}}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

数学-18

問 2 大きさの異なる 4 枚のカードがある。これらのカードに赤, 黒, 青, 黄の色を塗る。ただし, どのカードにも 1 つの色のみを使い, また同じ色のカードが 2 枚以上あってもよいものとする。

- (1) 全部で **NOP** 通りの塗り方がある。
- (2) 全部の色を使う塗り方は **QR** 通りある。
- (3) 2 枚は赤で, 1 枚が黒, 1 枚が青となるような塗り方は **ST** 通りある。
- (4) 3 つの色を使う塗り方は **UVW** 通りある。
- (5) 2 つの色を使う塗り方は **XY** 通りある。

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わります。I の解答欄 Z はマークしないでください。

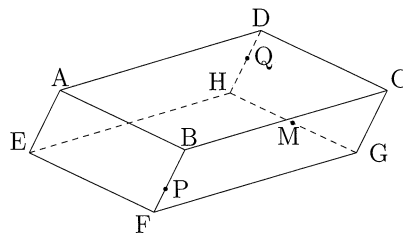
II

問1 右図の平行六面体は

$$AB = 2, \quad AD = 3, \quad AE = 1$$

$$\angle BAD = 60^\circ, \quad \angle BAE = 90^\circ, \quad \angle DAE = 120^\circ$$

を満たしている。辺 GH の中点を M とする。また、辺 BF, DH 上にそれぞれ点 P, Q をとる。このとき、4 点 A, P, M, Q は同一平面上にあるとする。そのような P, Q の中で線分 PQ の長さが最大になるものを求めよう。



(1) $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AE} = \vec{c}$ とおくと、これらのベクトルの内積について

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{A}}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}}, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = \boxed{\text{D}}$$

が成り立つ。

(2) s, t を $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ とし、 $BP : PF = s : (1-s)$, $DQ : QH = t : (1-t)$ とおく。

4 点 A, P, M, Q が同一平面上にあるから

$$\vec{AM} = \alpha \vec{AP} + \beta \vec{AQ}$$

が成り立つような実数 α, β が存在する。したがって、 s, t は

$$s = \boxed{\text{E}} \left(\boxed{\text{F}} - t \right)$$

を満たす。このとき、 $|\vec{PQ}|$ は t を用いて

$$|\vec{PQ}|^2 = \boxed{\text{G}} t^2 - \boxed{\text{HI}} t + \boxed{\text{JK}}$$

と表される。

よって、線分 PQ の長さが最大になるのは $\boxed{\text{L}}$ のときである。ただし、 $\boxed{\text{L}}$ には、下の選択肢 ① ~ ⑤ の中から適するものを選びなさい。

- | | | |
|--|----------------------------------|--|
| ① $s = 0, \quad t = 1$ | ② $s = 0, \quad t = \frac{1}{2}$ | ③ $s = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{3}{4}$ |
| ④ $s = \frac{2}{3}, \quad t = \frac{2}{3}$ | ⑤ $s = 1, \quad t = \frac{1}{2}$ | ⑥ $s = 1, \quad t = \frac{2}{3}$ |

注) 内積 : inner product

- 計算欄 (memo) -

問 2 $x > 0, y > 0$ を満たす x, y に対して, $\frac{y}{x}, x, \frac{8}{y}$ の中で最も小さい値を m とおく。

また, $m = \frac{y}{x}$ となるような点 (x, y) の集合を $A, m = \frac{8}{y}$ となるような点 (x, y) の集合を B とする。

- (1) 次の文中の **M** ~ **S** には, 下の選択肢 ① ~ ⑦ の中から適するものを選びなさい。

A, B を求めると次のようになる。

$$A = \left\{ (x, y) \mid \mathbf{M} \leq \mathbf{N}, \mathbf{O} \leq 8 \mathbf{P} \right\}$$

$$B = \left\{ (x, y) \mid 8 \mathbf{Q} \leq \mathbf{R}, 8 \leq \mathbf{S} \right\}$$

- ① x ② y ③ $x + y$ ④ $x - y$
 ⑤ x^2 ⑥ xy ⑦ y^2 ⑧ $x^2 + y^2$

- (2) 次の文中の **T**, **U** には, 右ページの選択肢 ① ~ ⑧ の中から適するものを選びなさい。

xy 平面上に A, B を図示すると, A は **T**, B は **U** の灰色部分である。ただし, 座標軸は灰色部分に含まれない。

- (3) 点 $P(x, y)$ が $A \cup B$ を動くとき, m の最大値を求めよう。

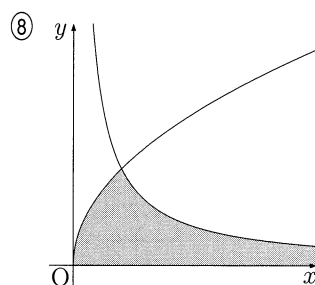
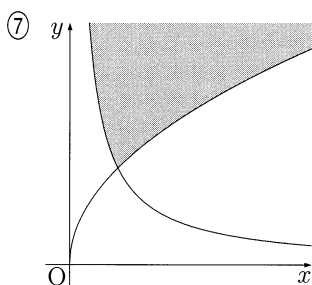
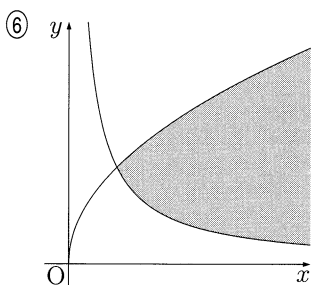
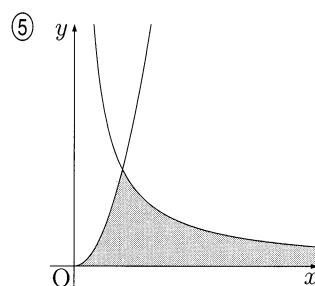
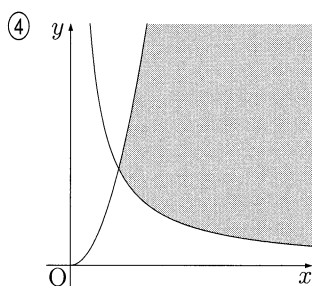
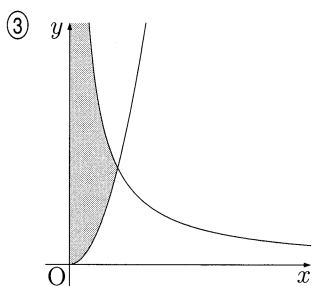
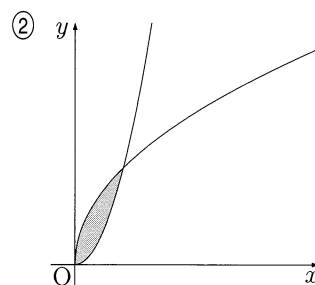
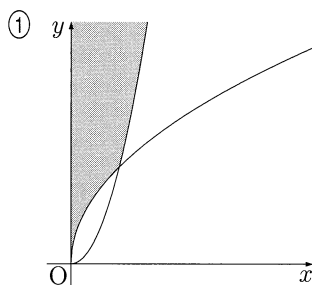
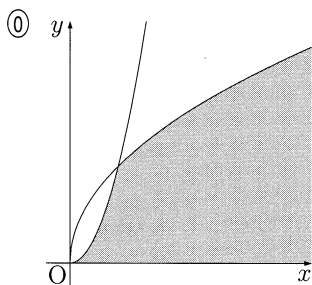
$P(x, y) \in A$ のとき, $y = mx$ であるから, 原点 O と P を通る直線の傾きを最大にする点 P を見つければよい。

また, $P(x, y) \in B$ のとき, $m = \frac{8}{y}$ であるから, P の y 座標が最小になる点 P を見つければよい。

以上より, m は $(x, y) = (\mathbf{V}, \mathbf{W})$ のとき, 最大値 **X** をとる。

(問 2 は次ページに続く)

[(2) の選択肢]



II の問題はこれで終わります。II の解答欄 **Y** , **Z** はマークしないでください。

III

$0 \leq x \leq \pi$ のとき、関数

$$f(x) = 4 \sin^3 x + 4 \cos^3 x - 8 \sin 2x - 7$$

の最大値、最小値を求めよう。

$t = \sin x + \cos x$ とおく。

$$\sin x + \cos x = \sqrt{\text{A}} \sin\left(x + \frac{\text{B}}{\text{C}}\pi\right) \quad (\text{ただし, } \text{B} < \text{C})$$

であるから、 t のとる値の範囲は $-\text{D} \leq t \leq \sqrt{\text{E}}$ である。また

$$\sin 2x = t^2 - \text{F}$$

$$4 \sin^3 x + 4 \cos^3 x = -\text{G}t^3 + \text{H}t$$

であるから

$$f(x) = -\text{G}t^3 - \text{I}t^2 + \text{H}t + \text{J} \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

である。① の右辺を $g(t)$ とおき、 t で微分すると

$$g'(t) = -\text{K}(\text{L}t - \text{M})(t + \text{N})$$

である。

したがって、 $g(t) (= f(x))$ は、 $t = \frac{\text{O}}{\text{P}}$ で最大値 $\frac{\text{QR}}{\text{ST}}$ をとり、 $t = \sqrt{\text{U}}$ で

最小値 $\text{V}\sqrt{\text{W}} - \text{XY}$ をとる。

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わります。III の解答欄 Z はマークしないでください。

IV

$a_n = \int_0^1 x^{2n} \sqrt{1-x^2} dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくと、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ を求めよう。

(1) まず、 a_0, a_1 を求めてみよう。半径 1 の円の面積は π であるから

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{A}}}$$

である。 a_1 は部分積分法により

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}} \left[x(1-x^2)^{\frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}}} \right]_0^1 + \frac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}} dx \\ &= \frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}} \left\{ \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x^{\boxed{\text{L}}} \sqrt{1-x^2} dx \right\} \end{aligned}$$

となる。よって、 $a_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{MN}}}$ である。

(IV) は次ページに続く)

注) 部分積分法 : the partial integral method

(2) 次の文中の $\boxed{\text{O}}$ ~ $\boxed{\text{U}}$ には, 下の選択肢 ① ~ ⑨の中から適するものを選びなさい。

a_1 を求めたのと同様にして, a_n は部分積分法により

$$a_n = \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}} \left\{ \int_0^1 x^{\boxed{\text{Q}}} \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x^{\boxed{\text{R}}} \sqrt{1-x^2} dx \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。よって

$$\left(\boxed{\text{S}} \right) a_n = \left(\boxed{\text{T}} \right) a_{n-1}$$

となる。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \boxed{\text{U}}$$

を得る。

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4
- ⑥ $2n-2$ ⑦ $2n-1$ ⑧ $2n$ ⑨ $2n+1$ ⑩ $2n+2$

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。 $\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{V}}$ ~ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース2の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース2」が正しくマークしてあるか、
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

