2019年度　日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを<u>一つだけ</u>選んで解答してください。

Ⅰ　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(ＨＢ)で記入してください。

2．問題文中の**A**，**B**，**C**，… には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。適するものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\mathsf{A}}$，$\boxed{\mathsf{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\mathsf{A}}$，$\boxed{\mathsf{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\dfrac{2}{6}$ は $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ は $\dfrac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\mathsf{A}}\sqrt{\boxed{\mathsf{B}}}}{\boxed{\mathsf{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\mathsf{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受 験 番 号			＊					＊						
名　　　前														

数学 コース 1

（基本コース）

（コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

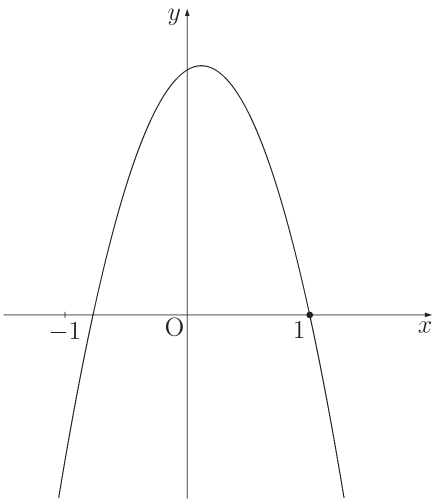
I

問 1　次の文中の $\boxed{\text{A}}$ ～ $\boxed{\text{K}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

(1)　グラフが右図のようになる 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

を考える。



このとき，a, b, c は次の式を満たす。

(i)　a $\boxed{\text{A}}$ 0，b $\boxed{\text{B}}$ 0，c $\boxed{\text{C}}$ 0

(ii)　$a+b+c$ $\boxed{\text{D}}$ 0

(iii)　$a-b+c$ $\boxed{\text{E}}$ 0

(iv)　$4a+2b+c$ $\boxed{\text{F}}$ 0

(v)　b^2-4ac $\boxed{\text{G}}$ 0

(2)　a, b, c が (1) の (i), (ii) を満たすとき，$a^2-8b-8c$ の値が最小となるような場合を考えよう。

このとき，$a = \boxed{\text{H}}$ であり，$y = ax^2+bx+c$ を b を用いて表すと

$$y = \boxed{\text{H}}\,x^2 + bx - b + \boxed{\text{I}}$$

となる。また，b の値の範囲は $\boxed{\text{J}} < b < \boxed{\text{K}}$ である。

⓪　0　　①　1　　②　2　　③　3　　④　4

⑤　−2　　⑥　−4　　⑦　>　　⑧　=　　⑨　<

- 計算欄 (memo) -

問 2　次のようなサイコロ X を投げる試行について考える。サイコロ X は，1 から 5 までの目が出る確率はすべて同じであるが，6 の目が出る確率は他の目の出る確率の 2 倍である。

(1)　サイコロ X を投げるとき，1 から 5 までの目が出る確率をそれぞれ p とすると，6 の目が出る確率は $\boxed{\mathbf{L}}\,p$ である。全事象の確率は $\boxed{\mathbf{M}}$ であるから，$p = \dfrac{\boxed{\mathbf{N}}}{\boxed{\mathbf{O}}}$ である。

(2)　いま，サイコロ X を 2 回続けて投げる。「2 回とも 1 から 5 までのいずれかの目が出る」という事象を A,「少なくとも 1 回は 6 の目が出る」という事象を B とする。このとき，事象 A の起こる確率 $P(A)$ と事象 B の起こる確率 $P(B)$ は

$$P(A) = \frac{\boxed{\mathbf{PQ}}}{\boxed{\mathbf{RS}}}, \quad P(B) = \frac{\boxed{\mathbf{TU}}}{\boxed{\mathbf{VW}}}$$

である。したがって，$\boxed{\mathbf{X}}$ である。ただし，$\boxed{\mathrm{X}}$ には，下の選択肢 ⓪ 〜 ④ の中から適するものを選びなさい。

⓪　$P(A)$ の方が $P(B)$ より低く，その差は $\frac{1}{36}$ 以上

①　$P(A)$ の方が $P(B)$ より低く，その差は $\frac{1}{36}$ 未満

②　$P(A)$ と $P(B)$ は同じ

③　$P(A)$ の方が $P(B)$ より高く，その差は $\frac{1}{36}$ 以上

④　$P(A)$ の方が $P(B)$ より高く，その差は $\frac{1}{36}$ 未満

（問 2 は次ページに続く）

注）サイコロ：dice

(3)　次に，サイコロ X を 3 回続けて投げる。「3 回とも 1 から 5 までのいずれかの目が出る」という事象を C,「少なくとも 1 回は 6 の目が出る」という事象を D とするとき，確率 $P(C)$ と確率 $P(D)$ を比べると **Y** である。ただし，Y には，下の選択肢 ⓪ ～ ④ の中から適するものを選びなさい。

⓪　$P(C)$ の方が $P(D)$ より低く，$P(D)$ は $P(C)$ の 2 倍以上

①　$P(C)$ の方が $P(D)$ より低く，$P(D)$ は $P(C)$ の 2 倍未満

②　$P(C)$ と $P(D)$ は同じ

③　$P(C)$ の方が $P(D)$ より高く，$P(C)$ は $P(D)$ の 2 倍以上

④　$P(C)$ の方が $P(D)$ より高く，$P(C)$ は $P(D)$ の 2 倍未満

I の問題はこれで終わりです。I の解答欄 **Z** はマークしないでください。

II

問 1　$a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ とする。不等式

$$2\left|x-\frac{a}{b}\right|+x < 10$$

を満たす整数 x を求めよう。

(1)　$\dfrac{a}{b}=\boxed{\mathbf{A}}+\sqrt{\boxed{\mathbf{BC}}}$ である。したがって，$\dfrac{a}{b}$ より小さい整数の中で，最大のものは $\boxed{\mathbf{D}}$ である。

(2)　次の文中の $\boxed{\mathbf{F}}$，$\boxed{\mathbf{H}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑦ の中から適するものを選び，$\boxed{\mathbf{E}}$，$\boxed{\mathbf{G}}$ には，適する数を入れなさい。

x が整数のとき，不等式の左辺は，絶対値の記号を用いずに次のように表される。

$$\begin{cases} x \leqq \boxed{\mathbf{E}} \text{ ならば，} 2\left|x-\dfrac{a}{b}\right|+x=\boxed{\mathbf{F}} \\ x \geqq \boxed{\mathbf{G}} \text{ ならば，} 2\left|x-\dfrac{a}{b}\right|+x=\boxed{\mathbf{H}} \end{cases}$$

⓪ $x-6-2\sqrt{10}$　① $x+8+2\sqrt{15}$　② $-x+8+2\sqrt{15}$　③ $-x+6+2\sqrt{10}$

④ $3x-6-2\sqrt{10}$　⑤ $3x-8-2\sqrt{15}$　⑥ $-3x+8+2\sqrt{15}$　⑦ $-3x+6+2\sqrt{10}$

(3)　不等式 $2\left|x-\dfrac{a}{b}\right|+x<10$ を満たす整数 x は，$\boxed{\mathbf{I}}$ 以上 $\boxed{\mathbf{J}}$ 以下の整数である。

注）絶対値：absolute value

- 計算欄 (memo) -

問 2　a を実数とし，x に関する 2 次関数

$$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - a$$
$$g(x) = 4 - x^2$$

について，次の問いに答えなさい。

(1)　方程式 $f(x) = g(x)$ が異なる 2 つの解をもつような a の値の範囲は

$$-\boxed{\mathbf{K}} < a < \boxed{\mathbf{L}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。

(2)　(1) のとき，放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は 2 点で交わる。これらの交点の y 座標がどちらも正となるような a の値の範囲を求めよう。

まず，$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。方程式 $f(x) = g(x)$ の解は，放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標であるから，$h(x) = 0$ の 2 つの解が $-\boxed{\mathbf{M}}$ と $\boxed{\mathbf{N}}$ の間にあればよい。よって

$$h(-\boxed{\mathrm{M}}) = a^2 - \boxed{\mathbf{O}}\,a + \boxed{\mathbf{P}} > 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$
$$h(\boxed{\mathrm{N}}) = a^2 + \boxed{\mathbf{Q}}\,a + \boxed{\mathbf{R}} > 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

である。また，放物線 $y = h(x)$ の軸の位置から

$$-\boxed{\mathbf{S}} < a < \boxed{\mathbf{T}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

である。したがって，①，②，③，④ より

$$-\boxed{\mathbf{U}} < a < \boxed{\mathbf{V}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{W}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

m, n を正の整数とし，有理数

$$r = \frac{m}{3} + \frac{n}{7}$$

を考える。$r < \sqrt{2}$ を満たす r の中で，$\sqrt{2}$ に最も近くなるような m, n を求めよう。

不等式

$$\boxed{\mathbf{A}}\,m + \boxed{\mathbf{B}}\,n < \boxed{\mathbf{CD}}\sqrt{2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たすような m, n の中で，$\boxed{\mathrm{A}}\,m + \boxed{\mathrm{B}}\,n$ が $\boxed{\mathrm{CD}}\sqrt{2}$ に最も近くなるものを見つければよい。

① の両辺を 2 乗して

$$\left(\boxed{\mathrm{A}}\,m + \boxed{\mathrm{B}}\,n\right)^2 < \boxed{\mathbf{EFG}}$$

を得る。

ここで，$\boxed{\mathrm{EFG}}$ より小さい最大の平方数は $\boxed{\mathbf{HIJ}} = \boxed{\mathbf{KL}}^2$ である。そこで，方程式

$$\boxed{\mathrm{A}}\,m + \boxed{\mathrm{B}}\,n = \boxed{\mathrm{KL}}$$

を考える。この式を変形して

$$n = \frac{\boxed{\mathbf{MN}} - \boxed{\mathbf{O}}\,m}{\boxed{\mathbf{P}}}$$

を得る。

ここで，n は整数であるから，$\boxed{\mathrm{MN}} - \boxed{\mathrm{O}}\,m$ は $\boxed{\mathbf{Q}}$ の倍数である。したがって，求める m, n は

$$m = \boxed{\mathbf{R}}, \quad n = \boxed{\mathbf{S}}$$

である。

注） 有理数：rational number，平方数：square number

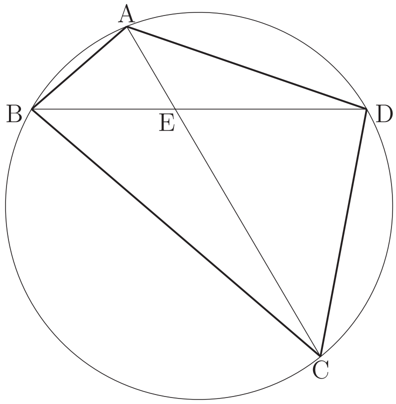
- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{T}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

半径 1 の円に内接する四角形 ABCD において，$AB : AD = 1 : 2$，$\angle BAD = 120°$ とする。また，対角線 BD と対角線 AC の交点を E とするとき，$BE : ED = 3 : 4$ とする。

このとき，四角形 ABCD の面積を求めよう。



四角形 ABCD の面積を求めるために，三角形 ABD の面積 △ABD と三角形 BCD の面積 △BCD を求める。

まず，△ABD を求める。

$$BD = \sqrt{\boxed{\mathbf{A}}}, \quad AB = \frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{BC}}}}{\boxed{\mathbf{D}}}$$

であるから

$$\triangle ABD = \frac{\boxed{\mathbf{E}}\sqrt{\boxed{\mathbf{F}}}}{\boxed{\mathbf{GH}}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。

次に，△BCD を求める。

$$\triangle ABC : \triangle ACD = \boxed{\mathbf{I}} : \boxed{\mathbf{J}}$$

であるから，$BC : CD = \boxed{\mathbf{K}} : \boxed{\mathbf{L}}$ である。ただし，比は最も簡単な整数比で答えなさい。したがって，$BC = \dfrac{\boxed{\mathbf{M}}\sqrt{\boxed{\mathbf{NO}}}}{\boxed{\mathbf{P}}}$ となり

$$\triangle BCD = \frac{\boxed{\mathbf{Q}}\sqrt{\boxed{\mathbf{R}}}}{\boxed{\mathbf{ST}}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

である。

よって，① と ② より，四角形 ABCD の面積は $\dfrac{\boxed{\mathbf{U}}\sqrt{\boxed{\mathbf{V}}}}{\boxed{\mathbf{W}}}$ である。

注） 内接する：be inscribed

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{X}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

Ⅰ

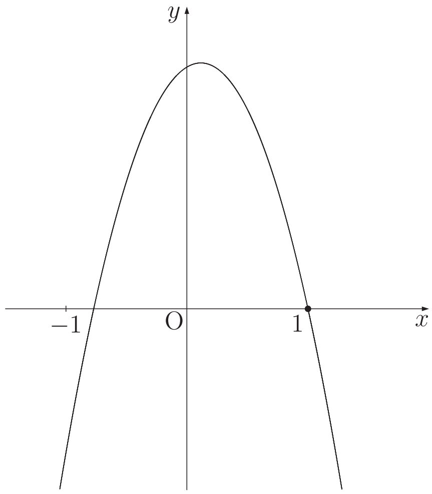
問 1　次の文中の $\boxed{\mathbf{A}}$ ～ $\boxed{\mathbf{K}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

(1)　グラフが右図のようになる 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

を考える。

このとき，a, b, c は次の式を満たす。



(i)　a $\boxed{\mathbf{A}}$ 0，　b $\boxed{\mathbf{B}}$ 0，　c $\boxed{\mathbf{C}}$ 0

(ii)　$a+b+c$ $\boxed{\mathbf{D}}$ 0

(iii)　$a-b+c$ $\boxed{\mathbf{E}}$ 0

(iv)　$4a+2b+c$ $\boxed{\mathbf{F}}$ 0

(v)　b^2-4ac $\boxed{\mathbf{G}}$ 0

(2)　a, b, c が (1) の (i), (ii) を満たすとき，$a^2-8b-8c$ の値が最小となるような場合を考えよう。

このとき，$a =$ $\boxed{\mathbf{H}}$ であり，$y = ax^2 + bx + c$ を b を用いて表すと

$$y = \boxed{\mathrm{H}}\,x^2 + bx - b + \boxed{\mathbf{I}}$$

となる。また，b の値の範囲は $\boxed{\mathbf{J}} < b < \boxed{\mathbf{K}}$ である。

⓪　0	①　1	②　2	③　3	④　4
⑤　−2	⑥　−4	⑦　>	⑧　=	⑨　<

- 計算欄 (memo) -

問 2　次のようなサイコロ X を投げる試行について考える。サイコロ X は，1 から 5 までの目が出る確率はすべて同じであるが，6 の目が出る確率は他の目の出る確率の 2 倍である。

(1)　サイコロ X を投げるとき，1 から 5 までの目が出る確率をそれぞれ p とすると，6 の目が出る確率は $\boxed{\text{L}}\,p$ である。全事象の確率は $\boxed{\text{M}}$ であるから，$p = \dfrac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{O}}}$ である。

(2)　いま，サイコロ X を 2 回続けて投げる。「2 回とも 1 から 5 までのいずれかの目が出る」という事象を A,「少なくとも 1 回は 6 の目が出る」という事象を B とする。このとき，事象 A の起こる確率 $P(A)$ と事象 B の起こる確率 $P(B)$ は

$$P(A) = \frac{\boxed{\text{PQ}}}{\boxed{\text{RS}}}, \quad P(B) = \frac{\boxed{\text{TU}}}{\boxed{\text{VW}}}$$

である。したがって，$\boxed{\text{X}}$ である。ただし，$\boxed{\text{X}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ④ の中から適するものを選びなさい。

⓪　$P(A)$ の方が $P(B)$ より低く，その差は $\dfrac{1}{36}$ 以上

①　$P(A)$ の方が $P(B)$ より低く，その差は $\dfrac{1}{36}$ 未満

②　$P(A)$ と $P(B)$ は同じ

③　$P(A)$ の方が $P(B)$ より高く，その差は $\dfrac{1}{36}$ 以上

④　$P(A)$ の方が $P(B)$ より高く，その差は $\dfrac{1}{36}$ 未満

（問 2 は次ページに続く）

注）サイコロ：dice

(3)　次に，サイコロ X を 3 回続けて投げる。「3 回とも 1 から 5 までのいずれかの目が出る」という事象を C,「少なくとも 1 回は 6 の目が出る」という事象を D とするとき，確率 $P(C)$ と確率 $P(D)$ を比べると **Y** である。ただし，Y には，下の選択肢 ⓪ ～ ④ の中から適するものを選びなさい。

⓪ $P(C)$ の方が $P(D)$ より低く，$P(D)$ は $P(C)$ の 2 倍以上

① $P(C)$ の方が $P(D)$ より低く，$P(D)$ は $P(C)$ の 2 倍未満

② $P(C)$ と $P(D)$ は同じ

③ $P(C)$ の方が $P(D)$ より高く，$P(C)$ は $P(D)$ の 2 倍以上

④ $P(C)$ の方が $P(D)$ より高く，$P(C)$ は $P(D)$ の 2 倍未満

I の問題はこれで終わりです。I の解答欄 **Z** はマークしないでください。

II

問 1　次の文中の $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{D}}$, $\boxed{\mathrm{E}}$, $\boxed{\mathrm{G}}$ には，下の選択肢 ⓪ 〜 ⑨ の中から適するものを選び，他の $\boxed{}$ には適する数を入れなさい。

点 O を中心とする半径 2 の球があり，その球面上に 4 つの頂点を持つ四面体 ABCD を考える。この四面体 ABCD において，AB = BC = CA = 2 であり，辺 BD は球の直径であるとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。

(1)　線分 DA, BC の中点をそれぞれ M, N とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}} = \boxed{\mathrm{A}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{MN}} = \frac{\boxed{\mathrm{B}}}{\boxed{\mathrm{C}}} + \boxed{\mathrm{D}}$$

である。

(2)　線分 MN の中点を P とし，三角形 BCD の重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{\mathrm{E}}}{\boxed{\mathrm{F}}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\boxed{\mathrm{G}}}{\boxed{\mathrm{H}}}, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right| = \frac{\sqrt{\boxed{\mathrm{I}}}}{\boxed{\mathrm{J}}}$$

である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{\boxed{\mathrm{K}}}{\boxed{\mathrm{L}}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから，3 点 A, P, G は一直線上にあることがわかる。

⓪ $\vec{a}$	① $\vec{b}$	② $\vec{c}$	③ $\vec{a} - \vec{b}$	④ $\vec{b} - \vec{c}$
⑤ $\vec{c} - \vec{a}$	⑥ $\vec{a} + \vec{b}$	⑦ $\vec{b} + \vec{c}$	⑧ $\vec{c} + \vec{a}$	⑨ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

注）重心：center of gravity

- 計算欄 (memo) -

問 2　複素数平面上の異なる 3 点 A, B, C を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とする。α, β, γ が

$$(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$|\beta-2\alpha+\gamma| = 3 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を満たすとき，三角形 ABC の面積を求めよう。

まず，① より

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{-\boxed{\mathbf{M}} \pm \sqrt{\boxed{\mathbf{N}}}\,i}{\boxed{\mathbf{O}}}$$

であるから

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \boxed{\mathbf{P}}, \quad \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \pm\frac{\boxed{\mathbf{Q}}}{\boxed{\mathbf{R}}}\pi$$

である。ただし，$-\pi < \arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} < \pi$ とする。また

$$\beta-2\alpha+\gamma = (\beta-\alpha)\cdot\frac{\boxed{\mathbf{S}} \pm \sqrt{\boxed{\mathbf{T}}}\,i}{\boxed{\mathbf{U}}}$$

であるから，② より

$$|\beta-\alpha| = \boxed{\mathbf{V}}$$

となる。

したがって，三角形 ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\mathbf{W}}\sqrt{\boxed{\mathbf{X}}}}{\boxed{\mathbf{Y}}}$ である。

注）複素数平面：complex plane，複素数：complex number

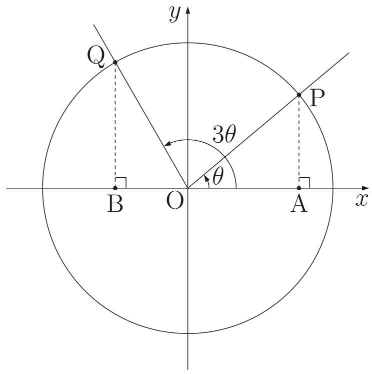
\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

座標平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円 C を考える。x 軸の正の部分から角 θ だけ回転した動径と C の交点を P とおき，x 軸の正の部分から角 3θ だけ回転した動径と C の交点を Q とおく。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。

また，点 P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を A，点 Q を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を B とおく。さらに，線分 AB の長さを ℓ とおく。



(1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\ell = \dfrac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$ である。

(2) ℓ の最大値を求めよう。$\cos\theta = t$ とおき，ℓ を t を用いて表すと

$$\ell = \left| \boxed{\text{C}}\, t^{\boxed{\text{D}}} - \boxed{\text{E}}\, t \right|$$

である。また，$g(t) = \boxed{\text{C}}\, t^{\boxed{\text{D}}} - \boxed{\text{E}}\, t$ とおくと

$$g'(t) = \boxed{\text{F}} \left(\boxed{\text{G}}\, t^{\boxed{\text{H}}} - 1 \right)$$

である。したがって

$$\cos\theta = \pm \frac{\sqrt{\boxed{\text{I}}}}{\boxed{\text{J}}}$$

のとき ℓ は最大になり，その値は $\dfrac{\boxed{\text{K}}\sqrt{\boxed{\text{L}}}}{\boxed{\text{M}}}$ である。

（III は次ページに続く）

(3)　次の文中の $\boxed{\mathbf{N}}$ ～ $\boxed{\mathbf{S}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

ℓ が最大になるような点 P と Q は 2 組あり，それらの座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{I}}}}{\boxed{\mathbf{J}}},\ \boxed{\mathbf{N}}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\boxed{\mathbf{O}},\ \boxed{\mathbf{P}}\right)$$

と

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{I}}}}{\boxed{\mathbf{J}}},\ \boxed{\mathbf{Q}}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\boxed{\mathbf{R}},\ \boxed{\mathbf{S}}\right)$$

である。

⓪ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　① $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　② $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　③ $-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

④ $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$　⑤ $-\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$　⑥ $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$　⑦ $-\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

⑧ $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$　⑨ $-\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 $\boxed{\mathbf{T}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

$\boxed{\mathrm{IV}}$

次の各問いに答えなさい。ただし，log は自然対数とする。

(1)　$f(x) = x - 1 - \log x$ とする。このとき，$f(x)$ の最小値を求めよう。$f'(x)$ を求めると

$$f'(x) = \boxed{\mathbf{A}} - \frac{\boxed{\mathbf{B}}}{x}$$

となる。また，$f(x)$ の増減を調べると，$x = \boxed{\mathbf{C}}$ において最小値 $\boxed{\mathbf{D}}$ をとる。これより，不等式 $x - 1 \geqq \log x$ が成り立つ。

(2)　次の文中の $\boxed{\mathbf{G}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ③ の中から適するものを選び，他の $\boxed{\phantom{\mathbf{A}}}$ には適する数を入れなさい。

k は正の実数とし，n は正の整数とする。3 直線 $y = \dfrac{x}{k} - 1$，$x = n$，$x = n + 1$ と曲線 $y = \log \dfrac{x}{k}$ で囲まれた図形の面積を S とおく。このとき，S を k, n の式で表そう。

(1) の結果を用いて S を求めると

$$S = \left[\frac{x^{\boxed{\mathbf{E}}}}{\boxed{\mathbf{F}}\,k} - x - \boxed{\mathbf{G}} + x \log k \right]_n^{n+1}$$

$$= \frac{\boxed{\mathbf{H}}\,n + 1}{\boxed{\mathbf{I}}\,k} + \log k - (n + \boxed{\mathbf{J}}) \log(n + \boxed{\mathbf{K}}) + n \log n$$

となる。

⓪　$x(\log x + 1)$　　①　$x(\log x - 1)$　　②　$\dfrac{\log x + 1}{x}$　　③　$\dfrac{\log x - 1}{x}$

（$\boxed{\mathrm{IV}}$ は次ページに続く）

注）自然対数：natural logarithm

(3)　n を固定し，k を $k>0$ の範囲で動かしたとき，(2) の S の最小値を a_n とする。このとき，a_n および $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよう。

S を k で微分すると

$$\frac{dS}{dk} = \frac{\boxed{\mathsf{L}}\,k-(\boxed{\mathsf{M}}\,n+1)}{\boxed{\mathsf{N}}\,k^2}$$

である。よって，S は $k = n+\dfrac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{P}}}$ で最小となるから，

$$a_n = \boxed{\mathsf{Q}} - \log\left\{\left(\boxed{\mathsf{R}} + \frac{\boxed{\mathsf{S}}}{n}\right)^n \cdot \frac{\boxed{\mathsf{T}}\,n+\boxed{\mathsf{U}}}{\boxed{\mathsf{V}}\,n+1}\right\}$$

となる。したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\mathsf{W}}$$

である。

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{X}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。