問題冊子

平成24年度（2012年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．問題冊子には，メモや計算などを書いてもよいです。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2．問題文中のA，B，C,…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{12}$ のときは，$2\sqrt{3}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\mathsf{A}}\sqrt{\boxed{\mathsf{B}}}}{\boxed{\mathsf{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，以下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\mathsf{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

3．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

数学 コース 1
（基本コース）

（コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース 1」と「コース 2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース 1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース 1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　a, b を定数とし，$a > 0$ とする。2 次関数

$$y = 4x^2 + 2ax + b$$

のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に $1-7a$ だけ平行移動する。平行移動したグラフが点 $(0, 4)$ を通るとき

$$b = \boxed{\mathsf{AB}}\,a^2 + \boxed{\mathsf{C}}\,a + \boxed{\mathsf{D}}$$

であり，そのグラフを表す 2 次関数は

$$y = \boxed{\mathsf{E}}\,x^2 - \boxed{\mathsf{F}}\,ax + \boxed{\mathsf{G}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。

2 次関数 ① のグラフが x 軸に接するとき，$a = \dfrac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}$ であり，そのときの接点の x 座標は $x = \boxed{\mathsf{J}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　多項式

$$P = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$$

を考える。

(1)　a を有理数とする。$x = 1 - \sqrt{2}$ に対して，P の値が有理数になるのは $a = \boxed{\mathsf{K}}$ のときであり，そのときの P の値は $P = \boxed{\mathsf{LM}}$ である。

(2)　x, a を正の整数とする。P の値が素数になるような x, a をみつけよう。

P を因数分解して

$$P = (x - \boxed{\mathsf{N}})(x + \boxed{\mathsf{O}}\,a + \boxed{\mathsf{P}})$$

を得る。したがって，$x = \boxed{\mathsf{Q}}$ である。

さらに，P の値が素数になるような a の中で最小のものは $a = \boxed{\mathsf{R}}$ であり，そのときの P の値は $P = \boxed{\mathsf{ST}}$ である。

注）有理数：rational number，因数分解する：factorize

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{U}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　座標平面上の点 P は，最初は原点 $(0, 0)$ にあり，次の規則に従って平面上を移動する。

規則：1 個のサイコロを投げて，3 の倍数の目が出れば，点 P は x 軸の正の方向に 1 だけ移動し，3 の倍数でない目が出れば，点 P は y 軸の正の方向に 1 だけ移動する。

サイコロを 4 回投げるとする。

(1)　P が点 $(3, 1)$ に到達する確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{A}}}{\boxed{\mathrm{BC}}}$ である。

(2)　P が到達し得る点は，全部で $\boxed{\mathrm{D}}$ 個あり，それらの点の座標は整数 k を用いて

$$\left(k, \boxed{\mathrm{E}} - k\right) \quad \left(\boxed{\mathrm{F}} \leqq k \leqq \boxed{\mathrm{G}}\right)$$

と表すことができる。

このとき，P が点 $\left(k, \boxed{\mathrm{E}} - k\right)$ に到達する確率を p_k とすると，p_k の最大値は $\dfrac{\boxed{\mathrm{HI}}}{\boxed{\mathrm{BC}}}$ であり，最小値は $\dfrac{\boxed{\mathrm{J}}}{\boxed{\mathrm{BC}}}$ である。

(3)　P が点 $(1, 1)$ を通り，点 $(2, 2)$ に到達する確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{KL}}}{\boxed{\mathrm{BC}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　三角形 ABC の 3 辺 AB，BC，CA を $k:(1-k)$ の比に内分する点をそれぞれ D，E，F とする。ただし，$0 < k \leqq \dfrac{1}{2}$ である。

(1)　$k = \dfrac{1}{3}$ のとき，三角形 ABC の面積は三角形 DEF の面積の何倍になるかを考えよう。

$$\triangle\mathrm{ADF} = \triangle\mathrm{BED} = \triangle\mathrm{CFE} = \frac{\boxed{\mathbf{M}}}{\boxed{\mathbf{N}}}\triangle\mathrm{ABC}$$

であるから

$$\triangle\mathrm{ABC} = \boxed{\mathbf{O}}\,\triangle\mathrm{DEF}$$

である。

(2)　三角形 DEF の面積が三角形 ABC の面積の半分になるのは

$$k(1-k) = \frac{\boxed{\mathbf{P}}}{\boxed{\mathbf{Q}}}$$

のとき，すなわち $k = \dfrac{\boxed{\mathbf{R}} - \sqrt{\boxed{\mathbf{S}}}}{\boxed{\mathbf{T}}}$ のときである。

注）内分する：divide internally

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{U}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

m を実数とする。O を原点とする座標平面上で，放物線 $y=x^2$ とその曲線上にある 2 点

$$\mathrm{A}(a, ma+1), \quad \mathrm{B}(b, mb+1) \quad (a<0<b)$$

を考える。

(1) 2 点 A, B の x 座標 a, b は，m を用いて

$$a = \frac{m-\sqrt{D}}{\boxed{\text{A}}}, \quad b = \frac{m+\sqrt{D}}{\boxed{\text{B}}}$$

と表される。ここで，D の式は

$$D = m^2 + \boxed{\text{C}}$$

である。

(2) 線分 AB と y 軸との交点の座標を $(0, c)$ とおくと，$c = \boxed{\text{D}}$ である。

(3) さらに，3 点 O, A, B を頂点とする三角形 OAB の面積 S を a, b を用いて表すと

$$S = \frac{1}{2}\boxed{\text{E}}$$

である。

ただし，$\boxed{\text{E}}$ には，次の ⓪ ～ ⑤ の中から適切なものを選びなさい。

⓪ $a+b$ ① $a-b$ ② $b-a$ ③ a^2+b^2 ④ a^2-b^2 ⑤ b^2-a^2

また，m を用いて S を表すと

$$S = \frac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}\sqrt{m^2+\boxed{\text{H}}}$$

であるから，S が最小となるのは，$m = \boxed{\text{I}}$ のときであり，その最小値は $S = \boxed{\text{J}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 $\boxed{\mathsf{K}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

a を実数とし，x の 2 次式

$$A = x^2 + ax + 1$$
$$B = x^2 + (a+3)x + 4$$

を考える。

(1)　$A + B = 0$ を満たす実数 x が存在するような a のとり得る値の範囲は

$$a \leqq -\sqrt{\boxed{\mathsf{AB}}} - \frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}, \quad \sqrt{\boxed{\mathsf{AB}}} - \frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}} \leqq a$$

である。

(2)　$AB = 0$ を満たす実数 x が存在するような a のとり得る値の範囲は

$$a \leqq \boxed{\mathsf{EF}}, \quad \boxed{\mathsf{G}} \leqq a$$

である。

(3)　$A^2 + B^2 = 0$ を満たす実数 x が存在するのは，$a = \boxed{\mathsf{H}}$ のときに限り，そのときの x の値は $x = \boxed{\mathsf{IJ}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{K}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　a, b を定数とし，$a>0$ とする。2 次関数

$$y = 4x^2 + 2ax + b$$

のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に $1-7a$ だけ平行移動する。平行移動したグラフが点 $(0,4)$ を通るとき

$$b = \boxed{\mathsf{AB}}\,a^2 + \boxed{\mathsf{C}}\,a + \boxed{\mathsf{D}}$$

であり，そのグラフを表す 2 次関数は

$$y = \boxed{\mathsf{E}}\,x^2 - \boxed{\mathsf{F}}\,ax + \boxed{\mathsf{G}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。

2 次関数 ① のグラフが x 軸に接するとき，$a = \dfrac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}$ であり，そのときの接点の x 座標は $x = \boxed{\mathsf{J}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　多項式

$$P = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$$

を考える。

(1)　a を有理数とする。$x = 1 - \sqrt{2}$ に対して，P の値が有理数になるのは $a = \boxed{\mathsf{K}}$ のときであり，そのときの P の値は $P = \boxed{\mathsf{LM}}$ である。

(2)　x, a を正の整数とする。P の値が素数になるような x, a をみつけよう。

P を因数分解して

$$P = (x - \boxed{\mathsf{N}})(x + \boxed{\mathsf{O}}\,a + \boxed{\mathsf{P}})$$

を得る。したがって，$x = \boxed{\mathsf{Q}}$ である。

さらに，P の値が素数になるような a の中で最小のものは $a = \boxed{\mathsf{R}}$ であり，そのときの P の値は $P = \boxed{\mathsf{ST}}$ である。

注）有理数：rational number，因数分解する：factorize

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{ U }}$ ～ $\boxed{\text{ Z }}$ はマークしないでください。

II

初項から第 n 項までの和が

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 3n$$

である数列 $\{a_n\}\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考える。

(1)　$a_n = \boxed{\mathbf{A}}\,n + \boxed{\mathbf{B}}$ である。

(2)　$b_n = n^2 - 5n - 6$ である数列 $\{b_n\}\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，$b_n < 0$ となる項は全部で $\boxed{\mathbf{C}}$ 個あり，それらの項の和は $-\boxed{\mathbf{DE}}$ である。

(3)　(1), (2) の a_n, b_n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2\, b_k}{a_k} = \frac{1}{\boxed{\mathbf{F}}}\, n\left(n + \boxed{\mathbf{G}}\right)\left(n^2 - \boxed{\mathbf{H}}\,n - \boxed{\mathbf{I}}\right)$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{J}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

a, b, c を正の実数とする。座標平面上の 3 点 A$(a, 0)$, B$(3, b)$, C$(0, c)$ を頂点とする三角形 ABC を考える。その三角形 ABC の外接円は原点 O$(0, 0)$ を通り，$\angle\mathrm{BAC} = 60°$ とする。

(1) $\angle\mathrm{AOB} = \boxed{\mathsf{AB}}°$ であるから，$b = \sqrt{\boxed{\mathsf{C}}}$ である。

(2) 外接円を表す方程式は

$$\left(x - \frac{a}{\boxed{\mathsf{D}}}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{\boxed{\mathsf{E}}}\right)^2 = \frac{a^2 + c^2}{\boxed{\mathsf{F}}}$$

であり，c は a を用いて $c = \sqrt{\boxed{\mathsf{G}}}\left(\boxed{\mathsf{H}} - a\right)$ と表される。

(3) 線分 OB と線分 AC の交点を D とし，$\angle\mathrm{OAC} = \alpha$，$\angle\mathrm{ADB} = \beta$ とおく。

$a = 2\sqrt{3}$ のとき

$$\tan\alpha = \boxed{\mathsf{I}} - \sqrt{\boxed{\mathsf{J}}}, \quad \tan\beta = \boxed{\mathsf{K}}$$

である。

注）外接円：circumscribed circle

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textsf{L}}$ ～ $\boxed{\textsf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　a を正の実数とするとき，関数

$$f(x) = x^2 - 5 + 4a\log(2x + a + 8) \qquad \left(-\frac{a}{2} - 4 < x < -2\right)$$

の極値について調べよう。

(1)　関数 $f(x)$ を x について微分して

$$f'(x) = \frac{\boxed{\mathbf{A}}\left(\boxed{\mathbf{B}}\,x + a\right)\left(x + \boxed{\mathbf{C}}\right)}{\boxed{\mathbf{D}}\,x + a + \boxed{\mathbf{E}}}$$

を得る。

(2)　条件 $a > 0$ と関数 $f(x)$ の定義域が $-\dfrac{a}{2} - 4 < x < -2$ であることを考慮すると，$f(x)$ が極大値，極小値の両方をとるのは

$$\boxed{\mathbf{F}} < a < \boxed{\mathbf{G}} \quad \text{または} \quad \boxed{\mathrm{G}} < a$$

のときである。そのとき，$f(x)$ の極大値と極小値の和は

$$\frac{a^2}{\boxed{\mathbf{H}}} + \boxed{\mathbf{I}} + \boxed{\mathbf{J}}\,a\log\boxed{\mathbf{K}}\,a$$

である。

注）　定義域：domain

- 計算欄 (memo) -

問 2　正の整数 n と実数 a に対して，関数

$$f_n(a) = \int_0^{\pi} (\cos x + a \sin 2nx)^2 \, dx$$

を考える。

(1)　関数 $f_n(a)$ を

$$f_n(a) = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1 + \cos \boxed{\mathsf{L}} x}{2} + a^2 \frac{1 - \cos \boxed{\mathsf{M}} nx}{2} + a\Big(\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x\Big) \right\} dx$$

と変形して，この右辺の定積分を計算すると

$$f_n(a) = \frac{\pi}{\boxed{\mathsf{N}}} a^2 + \frac{\boxed{\mathsf{O}}\, n}{\boxed{\mathsf{P}}\, n^2 - \boxed{\mathsf{Q}}} a + \frac{\pi}{\boxed{\mathsf{R}}}$$

を得る。

(2)　$f_n(a)$ を最小にする a の値を a_n とし，$S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n}$ とおく。

このとき

$$S_N = -\frac{\boxed{\mathsf{S}}}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n - \boxed{\mathsf{T}}} - \frac{1}{2n + \boxed{\mathsf{U}}} \right)$$

$$= -\frac{\boxed{\mathsf{S}}}{\pi} \left(\boxed{\mathsf{V}} - \frac{1}{\boxed{\mathsf{W}}\, N + \boxed{\mathsf{X}}} \right)$$

である。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{N \to \infty} S_N = -\frac{\boxed{\mathsf{Y}}}{\pi}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。