平成24年度（2012年度）日本留学試験　**問題冊子**

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　**どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。**

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，以下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

数学 コース 1

（基本コース）

（コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース１」と「コース２」がありますので，どちらかのコースを<u>一つだけ</u>選んで解答してください。「コース１」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース１」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

<u>**選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。**</u>

I

問 1　$a \neq 0$ とする。x の 2 次関数

$$y = ax^2 - 4x - 4a \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

のグラフと原点 $(0, 0)$ に関して対称な曲線を G とする。

(1)　2 次関数 ① のグラフの頂点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\mathsf{A}}}{a},\ -\frac{\boxed{\mathsf{B}}}{a} - 4a \right)$$

である。

(2)　G を表す 2 次関数は，以下の選択肢の中の $\boxed{\mathsf{C}}$ である。

⓪ $y = ax^2 + 4x + 4a$　① $y = ax^2 + 4x - 4a$　② $y = ax^2 - 4x + 4a$

③ $y = -ax^2 + 4x + 4a$　④ $y = -ax^2 - 4x + 4a$　⑤ $y = -ax^2 - 4x - 4a$

(3)　G は，2 次関数 ① のグラフと 2 点

$$\left(\boxed{\mathsf{DE}},\ \boxed{\mathsf{F}} \right),\quad \left(\boxed{\mathsf{G}},\ \boxed{\mathsf{HI}} \right)$$

で交わる。

(4)　$a = 2$ とする。このとき，G を表す 2 次関数の区間 $\boxed{\mathsf{DE}} \leqq x \leqq \boxed{\mathsf{G}}$ における最大値は $\boxed{\mathsf{JK}}$，最小値は $\boxed{\mathsf{LM}}$ である。

注）　対称な：symmetric

- 計算欄 (memo) -

問 2　a を定数とし，x の方程式

$$|ax-11| = 4x-10 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。

(1)　方程式 ① は，絶対値の記号を使わないで表すと

$$ax \geqq 11 \text{ のとき，} \quad \left(a - \boxed{\mathsf{N}}\right)x = \boxed{\mathsf{O}}$$

$$ax < 11 \text{ のとき，} \quad \left(a + \boxed{\mathsf{P}}\right)x = \boxed{\mathsf{QR}}$$

となる。

(2)　$a = \sqrt{7}$ のとき，方程式 ① の解は

$$x = \frac{\boxed{\mathsf{S}}\left(\boxed{\mathsf{T}} - \sqrt{\boxed{\mathsf{U}}}\right)}{\boxed{\mathsf{V}}}$$

である。

(3)　特に，a を正の整数とする。方程式 ① が正の整数解をもつとき，$a = \boxed{\mathsf{W}}$ である。また，そのときの正の整数解は $x = \boxed{\mathsf{X}}$ である。

注）絶対値 : absolute value

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Y}}$, $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　2 つの箱 A, B がある。

A の箱には，数字 0 の書かれたカードが 3 枚，2 の書かれたカードが 2 枚，3 の書かれたカードが 1 枚入っている。

B の箱には，数字 1 の書かれたカードが 2 枚，2 の書かれたカードが 3 枚入っている。

いま，A の箱から同時に 2 枚，B の箱から 1 枚のカードをとり出し，とり出された 3 枚のカードに書かれた数字の積を X とする。

X のとり得る値は全部で $\boxed{\mathrm{A}}$ 個あり，X の最大値は $\boxed{\mathrm{BC}}$，X の最小値は $\boxed{\mathrm{D}}$ である。

また，$X = \boxed{\mathrm{BC}}$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{E}}}{\boxed{\mathrm{FG}}}$ であり，$X = \boxed{\mathrm{D}}$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{H}}}{\boxed{\mathrm{I}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　$\mathrm{AB}=8$，$\mathrm{AC}=5$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ である三角形 ABC を考える。辺 AB，AC 上にそれぞれ点 D, E を，線分 DE が三角形 ABC の面積を二等分するようにとる。このとき，$\mathrm{AD}=x$ として，次の問いに答えなさい。

(1)　AE を x の式で表すと $\mathrm{AE}=\dfrac{\boxed{\mathrm{JK}}}{x}$ である。

(2)　E が AC 上を動くとき，x のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\mathrm{L}} \leqq x \leqq \boxed{\mathrm{M}}$$

である。

(3)　$\mathrm{DE}^2=\left(x-\dfrac{\boxed{\mathrm{NO}}}{x}\right)^2+\boxed{\mathrm{PQ}}$ が成り立つので，線分 DE の長さは $x=\boxed{\mathrm{R}}\sqrt{\boxed{\mathrm{S}}}$ のとき最小となり，その値は $\boxed{\mathrm{T}}\sqrt{\boxed{\mathrm{U}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{V}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

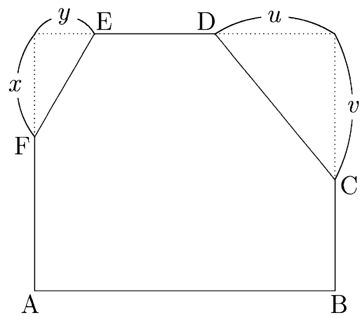
III

図のように長方形の 2 つの角を切り取った図形を考える。各辺の長さは

$$\mathrm{AB}=11,\quad \mathrm{BC}=4,\quad \mathrm{CD}=2\sqrt{13},$$
$$\mathrm{DE}=5,\quad \mathrm{EF}=2\sqrt{5},\quad \mathrm{FA}=6$$

とする。

このとき，この図形の面積を求めよう。



まず，図のように辺を延長し，切り取った三角形の直角を挟む 2 辺をそれぞれ，x，y，u，v とする。このとき

$$u=\boxed{\mathsf{A}}-y,\quad v=x+\boxed{\mathsf{B}}$$

であるから，等式 $u^2+v^2=\boxed{\mathsf{CD}}$ にこれらを代入して得られた式と等式 $x^2+y^2=\boxed{\mathsf{EF}}$ を用いて

$$x=\boxed{\mathsf{G}}\,y-\boxed{\mathsf{H}}$$

を得る。よって

$$\boxed{\mathsf{I}}\,y^2-\boxed{\mathsf{J}}\,y-\boxed{\mathsf{K}}=0$$

が成り立つので，$y=\boxed{\mathsf{L}}$ である。

したがって，$x=\boxed{\mathsf{M}}$，さらに，$u=\boxed{\mathsf{N}}$，$v=\boxed{\mathsf{O}}$ が求まる。よって，この図形の面積は $\boxed{\mathsf{PQ}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{R}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

2 つの実数 x, y が方程式

$$3x^2+2xy+3y^2=32 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしている。このとき，$x+y$ および xy がとる値の範囲を求めよう。

まず

$$x+y=a \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

とおく。①，② より y を消去して，x の 2 次方程式

$$\boxed{\mathbf{A}}\,x^2-\boxed{\mathbf{B}}\,ax+\boxed{\mathbf{C}}\,a^2-32=0$$

を得る。x は実数であるから

$$\boxed{\mathbf{DE}} \leqq a \leqq \boxed{\mathbf{F}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

である。

さらに

$$xy=b \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

とおくと，①，②，④ より

$$b=\frac{\boxed{\mathbf{G}}}{\boxed{\mathbf{H}}}\,a^2-\boxed{\mathbf{I}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ⑤$$

を得る。よって，③，⑤ より

$$\boxed{\mathbf{JK}} \leqq b \leqq \boxed{\mathbf{L}}$$

となる。

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 **M** ～ **Z** はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の V はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　$a \neq 0$ とする。x の 2 次関数

$$y = ax^2 - 4x - 4a \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

のグラフと原点 $(0, 0)$ に関して対称な曲線を G とする。

(1)　2 次関数 ① のグラフの頂点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\mathsf{A}}}{a},\ -\frac{\boxed{\mathsf{B}}}{a} - 4a \right)$$

である。

(2)　G を表す 2 次関数は，以下の選択肢の中の $\boxed{\mathsf{C}}$ である。

⓪ $y = ax^2 + 4x + 4a$　① $y = ax^2 + 4x - 4a$　② $y = ax^2 - 4x + 4a$

③ $y = -ax^2 + 4x + 4a$　④ $y = -ax^2 - 4x + 4a$　⑤ $y = -ax^2 - 4x - 4a$

(3)　G は，2 次関数 ① のグラフと 2 点

$$\left(\boxed{\mathsf{DE}}, \boxed{\mathsf{F}}\right), \quad \left(\boxed{\mathsf{G}}, \boxed{\mathsf{HI}}\right)$$

で交わる。

(4)　$a = 2$ とする。このとき，G を表す 2 次関数の区間 $\boxed{\mathsf{DE}} \leqq x \leqq \boxed{\mathsf{G}}$ における最大値は $\boxed{\mathsf{JK}}$，最小値は $\boxed{\mathsf{LM}}$ である。

注）対称な：symmetric

- 計算欄 (memo) -

問 2　a を定数とし，x の方程式

$$|ax-11| = 4x-10 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。

(1)　方程式 ① は，絶対値の記号を使わないで表すと

$$ax \geqq 11 \text{ のとき，} \quad \left(a-\boxed{\mathrm{N}}\right)x = \boxed{\mathrm{O}}$$

$$ax < 11 \text{ のとき，} \quad \left(a+\boxed{\mathrm{P}}\right)x = \boxed{\mathrm{QR}}$$

となる。

(2)　$a=\sqrt{7}$ のとき，方程式 ① の解は

$$x = \frac{\boxed{\mathrm{S}}\left(\boxed{\mathrm{T}}-\sqrt{\boxed{\mathrm{U}}}\right)}{\boxed{\mathrm{V}}}$$

である。

(3)　特に，a を正の整数とする。方程式 ① が正の整数解をもつとき，$a=\boxed{\mathrm{W}}$ である。また，そのときの正の整数解は $x=\boxed{\mathrm{X}}$ である。

注）絶対値 : absolute value

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{Y}}$, $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

半径が 2 の円 O に内接する三角形 ABC が

$$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしているとする。

直線 AO と線分 BC の交点を D とおくとき，線分 AD と線分 BD の長さを求めよう。

(1)　k を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\frac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{\boxed{\mathbf{C}}}{\boxed{\mathbf{D}}}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表すことができる。さらに，3 点 B, C, D が一直線上にあることから，$k=\dfrac{\boxed{\mathbf{EF}}}{\boxed{\mathbf{G}}}$

を得る。したがって，OD $=\boxed{\mathbf{H}}$ が求まり

$$\mathrm{AD}=\boxed{\mathbf{I}}$$

を得る。

(2)　(1) より BD $=\dfrac{\boxed{\mathbf{J}}}{\boxed{\mathbf{K}}}$BC となるので，線分 BD の長さを求めるためには，線分 BC の長さを求めればよい。

まず

$$\mathrm{BC}^2=\boxed{\mathbf{L}}-\boxed{\mathbf{M}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

である。ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を表すものとする。また，① より，$\left|4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=\boxed{\mathbf{NO}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\boxed{\mathbf{PQR}}}{\boxed{\mathbf{S}}}$$

を得る。したがって，BC $=\dfrac{\boxed{\mathbf{T}}\sqrt{\boxed{\mathbf{U}}}}{\boxed{\mathbf{V}}}$ が求まり

$$\mathrm{BD}=\frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{W}}}}{\boxed{\mathbf{X}}}$$

を得る。

注） 内接する：be inscribed，内積：inner product

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Y}}$, $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

正の数 x, y が

$$(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = \log_2 \frac{8x^2}{y^2} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしながら変わるとき，xy^2 の最大値 および そのときの x, y の値を求めよう。

(1)　① の右辺は

$$\log_2 \frac{8x^2}{y^2} = \boxed{\mathbf{A}} \log_2 x - \boxed{\mathbf{B}} \log_2 y + \boxed{\mathbf{C}}$$

と変形できる。

したがって，$\log_2 x = X$，$\log_2 y = Y$ とおくとき，① は X，Y を用いて

$$\left(X - \boxed{\mathbf{D}}\right)^2 + \left(Y + \boxed{\mathbf{E}}\right)^2 = \boxed{\mathbf{F}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

と表せる。

(2)　$\log_2 xy^2 = k$ とおく。この式は (1) の X，Y を用いて

$$X + \boxed{\mathbf{G}}\,Y - k = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

と表せる。

ここで，XY平面を考えると，② のグラフは円，③ のグラフは直線となる。k が最大になるのは，その円と直線が接するときである。よって，$k = \boxed{\mathbf{H}}$ のとき，xy^2 は最大値 $\boxed{\mathbf{IJ}}$ をとる。また，このとき $x = \boxed{\mathbf{K}}$，$y = \boxed{\mathbf{L}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{M}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　a を定数とする。関数

$$f(x)=2\sin^3 x+a\sin 2x+\frac{9}{2}\cos 2x-9\cos x-2ax+6$$

が $x=\frac{\pi}{3}$ で極値をもつとき，$f(x)$ の区間 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ における最大値と最小値について調べよう。

(1)　$f(x)$ が $x=\frac{\pi}{3}$ で極値をもつから，$a=\frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}$ である。

したがって，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\mathsf{C}}\sin x\left(\boxed{\mathsf{D}}\cos x-1\right)\left(\sin x-\boxed{\mathsf{E}}\right)$$

と表される。

(2)　(1) の結果より，$f(x)$ は区間 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ における最大値を $x=\boxed{\mathsf{F}}$ でとり，最小値を $x=\boxed{\mathsf{G}}$ でとる。

ただし，$\boxed{\mathsf{F}}$，$\boxed{\mathsf{G}}$ には，下の ⓪ ～ ④ の中から適当なものを選びなさい。

⓪ 0　① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{4}$　③ $\frac{\pi}{3}$　④ $\frac{\pi}{2}$

注）導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

問 2 　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{4}} x^n e^{-x} dx \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。

　このとき

$$a_1 = -\frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}} e^{\frac{\boxed{\mathsf{JK}}}{\boxed{\mathsf{L}}}} + 1$$

である。

　また，a_{n+1} は a_n を用いて

$$a_{n+1} = -\left(\frac{\boxed{\mathsf{M}}}{\boxed{\mathsf{N}}}\right)^{n+1} e^{\frac{\boxed{\mathsf{JK}}}{\boxed{\mathsf{L}}}} + \left(n + \boxed{\mathsf{O}}\right) a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と表される。これを変形すると

$$na_n = a_{n+1} - a_n + \left(\frac{\boxed{\mathsf{M}}}{\boxed{\mathsf{N}}}\right)^{n+1} e^{\frac{\boxed{\mathsf{JK}}}{\boxed{\mathsf{L}}}}$$

となり

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = a_{n+1} - a_1 + \frac{\boxed{\mathsf{P}}}{\boxed{\mathsf{QR}}} e^{\frac{\boxed{\mathsf{JK}}}{\boxed{\mathsf{L}}}} \left\{1 - \left(\frac{\boxed{\mathsf{S}}}{\boxed{\mathsf{T}}}\right)^n\right\}$$

を得る。

　ここで，$0 \leqq x$ のとき，e^{-x} のとり得る値の範囲は $0 < e^{-x} \leqq \boxed{\mathsf{U}}$ であるから

$$0 < a_n < \int_0^{\frac{1}{4}} \boxed{\mathsf{U}}\, x^n dx = \frac{1}{\boxed{\mathsf{V}}^{\,n+1}(n+1)}$$

が成り立つ。よって

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \boxed{\mathsf{W}}$$

であるから

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{\boxed{\mathsf{X}}}{\boxed{\mathsf{Y}}} e^{\frac{\boxed{\mathsf{JK}}}{\boxed{\mathsf{L}}}} - 1$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。