平成25年度（2013年度）日本留学試験　**問題冊子**

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　**どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。**

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，A，BC のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
(例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

数学 コース 1
（基本コース）

（コース２は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース１」と「コース２」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース１」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース１」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 次関数

$$y = -x^2 - ax + 3 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について考える。

(1)　$a > 0$ であって，関数 ① の最大値が 7 であるならば，$a = \boxed{\textbf{A}}$ である。このとき，この関数のグラフの軸の方程式は $x = \boxed{\textbf{BC}}$ であり，また，このグラフと x 軸との交点の x 座標は $\boxed{\textbf{DE}} \pm \sqrt{\boxed{\textbf{F}}}$ である。

(2)　関数 ① のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる曲線が $(-3, -5)$ を通るならば，$a = \boxed{\textbf{G}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　設問 (1) の $\boxed{\text{H}}$, $\boxed{\text{I}}$ と設問 (2) の $\boxed{\text{J}}$, $\boxed{\text{K}}$ には，下の ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

また，設問 (3) の $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{R}}$ には適する数を入れなさい。

実数 x, y について次の条件 p, q, r を考える。

p：　x, y が等式 $(x+y)^2 = a(x^2+y^2)+bxy$ を満たしている。
ただし，a, b は実数で定数とする。

q：　$x=0$ かつ $y=0$ である。

r：　$x=0$ または $y=0$ である。

(1)　条件 p において，$a=b=1$ とする。このとき，p は q であるための $\boxed{\text{H}}$。また，p は r であるための $\boxed{\text{I}}$。

(2)　条件 p において，$a=b=2$ とする。このとき，p は q であるための $\boxed{\text{J}}$。また，p は r であるための $\boxed{\text{K}}$。

(3)　条件 p において，$a=2$ とすると，p の式は

$$\left(x+\frac{b-\boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}}y\right)^2+\left(\boxed{\text{N}}-\frac{\left(b-\boxed{\text{O}}\right)^2}{\boxed{\text{P}}}\right)y^2=0$$

と変形できる。したがって，p が q であるための必要十分条件となるのは，b が

$$\boxed{\text{Q}} < b < \boxed{\text{R}}$$

を満たすときに限る。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{S}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　袋の中に白球が 1 個，赤球が 3 個，黒球が 5 個，計 9 個の球が入っている。この袋の中から同時に 2 個の球を取り出す。

いま，各球の点数を，白球が 5 点，赤球が 3 点，黒球が 1 点であるとする。このとき，この試行によって取り出された 2 つの球の点数の合計得点を考える。

(1)　最高の得点は $\boxed{\mathsf{A}}$ であり，それが起こる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{B}}}{\boxed{\mathsf{CD}}}$ である。

(2)　得点が 6 になる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}$ である。

(3)　得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\mathsf{GH}}}{\boxed{\mathsf{I}}}$ である。

注）　試行：trial，期待値：expected value

- 計算欄 (memo) -

問 2　自然数 n が完全平方数であるとは，$n = x^2$ を満たす自然数 x が存在することである。同様に，n が完全立方数であるとは，$n = x^3$ を満たす自然数 x が存在することである。

次の 2 つの場合について，n をそれぞれ求めよう。

(i)　n を完全平方数とする。n に 13 を加えた数も完全平方数である。

(ii)　n を完全立方数とする。n に 61 を加えた数も完全立方数である。

まず (i) を考える。完全平方数の定義より，x を自然数として $n = x^2$ と表せる。また，(i) の条件より，y を自然数として

$$x^2 + 13 = y^2$$

と表せる。したがって，$x < y$ であることから，$y - x = \boxed{\textsf{J}}$ かつ $y + x = \boxed{\textsf{KL}}$ であることが分かり

$$x = \boxed{\textsf{M}}, \quad y = \boxed{\textsf{N}}$$

を得る。よって，$n = \boxed{\textsf{OP}}$ である。

次に，(ii) を考える。(i) のときと同様に，(ii) の条件より，x を自然数として $n = x^3$，また，y を自然数として

$$x^3 + 61 = y^3$$

と表すことができる。これを解いて

$$x = \boxed{\textsf{Q}}, \quad y = \boxed{\textsf{R}}$$

を得るから，求める完全立方数 n は $\boxed{\textsf{ST}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{U}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

a を定数とする。2 次不等式

$$x^2 - 2(a+2)x + 25 > 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。

不等式 ① の左辺は

$$\left(x - a - \boxed{\mathbf{A}}\right)^2 - a^2 - \boxed{\mathbf{B}}\,a + \boxed{\mathbf{CD}}$$

と変形できる。したがって

(1) 不等式 ① がすべての実数 x に対して成り立つための条件は

$$\boxed{\mathbf{EF}} < a < \boxed{\mathbf{G}}$$

である。

(2) 不等式 ① が $x \geqq -1$ を満たすすべての実数 x に対して成り立つための条件は

$$\boxed{\mathbf{HIJ}} < a < \boxed{\mathbf{K}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{L}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

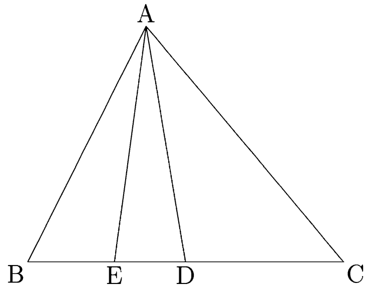
右の図において

$$\mathrm{AB}=4,\quad \mathrm{AC}=5,\quad \cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{8}$$

であり，また

$$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ACB},\quad \angle\mathrm{CAE}=\angle\mathrm{ABC}$$

であるとする。



(1)　△ABC の面積を S とおくと

$$S=\frac{\boxed{\mathsf{AB}}\sqrt{\boxed{\mathsf{C}}}}{\boxed{\mathsf{D}}}$$

であり，また，BC $=\boxed{\mathsf{E}}$ である。

(2)　△ABD と △ACE の面積をそれぞれ S_1, S_2 とおくと

$$S:S_1:S_2=1:\frac{\boxed{\mathsf{F}}}{\boxed{\mathsf{G}}}:\frac{\boxed{\mathsf{HI}}}{\boxed{\mathsf{JK}}}$$

である。

(3)　△ADE の面積を T とおくと

$$T=\frac{\boxed{\mathsf{LM}}\sqrt{\boxed{\mathsf{N}}}}{\boxed{\mathsf{OP}}}$$

である。また，DE $=\dfrac{\boxed{\mathsf{Q}}}{\boxed{\mathsf{R}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{S}}$ 〜 $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 次関数

$$y = -x^2 - ax + 3 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について考える。

(1)　$a > 0$ であって，関数 ① の最大値が 7 であるならば，$a = \boxed{\mathsf{A}}$ である。このとき，この関数のグラフの軸の方程式は $x = \boxed{\mathsf{BC}}$ であり，また，このグラフと x 軸との交点の x 座標は $\boxed{\mathsf{DE}} \pm \sqrt{\boxed{\mathsf{F}}}$ である。

(2)　関数 ① のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる曲線が $(-3, -5)$ を通るならば，$a = \boxed{\mathsf{G}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　設問 (1) の $\boxed{\text{H}}$, $\boxed{\text{I}}$ と設問 (2) の $\boxed{\text{J}}$, $\boxed{\text{K}}$ には，下の ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

また，設問 (3) の $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{R}}$ には適する数を入れなさい。

実数 x, y について次の条件 p, q, r を考える。

p：　x, y が等式 $(x+y)^2 = a(x^2+y^2) + bxy$ を満たしている。
ただし，a, b は実数で定数とする。

q：　$x = 0$ かつ $y = 0$ である。

r：　$x = 0$ または $y = 0$ である。

(1)　条件 p において，$a = b = 1$ とする。このとき，p は q であるための $\boxed{\text{H}}$。
また，p は r であるための $\boxed{\text{I}}$。

(2)　条件 p において，$a = b = 2$ とする。このとき，p は q であるための $\boxed{\text{J}}$。
また，p は r であるための $\boxed{\text{K}}$。

(3)　条件 p において，$a = 2$ とすると，p の式は

$$\left(x + \frac{b - \boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}}\,y\right)^2 + \left(\boxed{\text{N}} - \frac{\left(b - \boxed{\text{O}}\right)^2}{\boxed{\text{P}}}\right)y^2 = 0$$

と変形できる。したがって，p が q であるための必要十分条件となるのは，b が

$$\boxed{\text{Q}} < b < \boxed{\text{R}}$$

を満たすときに限る。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{S}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ は等差数列で

$$a_2=2, \quad a_6=3a_3$$

を満たしている。このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{r^{a_n}}$ を考える。ただし，r は正の実数である。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とおくと

$$a=\boxed{\mathrm{AB}}, \quad d=\boxed{\mathrm{C}}$$

である。

(2)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{r^{a_n}}$ は，初項が $\boxed{\mathrm{D}}\,r^{\boxed{\mathrm{E}}}$，公比が $\dfrac{\boxed{\mathrm{F}}}{r^{\boxed{\mathrm{G}}}}$ の無限等比級数である。

したがって，この級数は

$$r>3^{\frac{\boxed{\mathrm{H}}}{\boxed{\mathrm{I}}}}$$

のとき収束し，その和 S は

$$S=\frac{\boxed{\mathrm{J}}\,r^{\boxed{\mathrm{K}}}}{r^{\boxed{\mathrm{L}}}-\boxed{\mathrm{M}}}$$

である。

(3)　和 S が最小となるのは

$$r=\boxed{\mathrm{N}}^{\frac{\boxed{\mathrm{O}}}{2}}$$

のときである。

注）等差数列：arithmetic progression，級数：series，公差：common difference，
公比：common ratio，無限等比級数：infinite geometric series

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{P}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲において，関数

$$f(x) = \sin 2x - 3(\sin x + \cos x)$$

を考える。

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおく。t のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathbf{A}} - \sqrt{\boxed{\mathbf{B}}}}{\boxed{\mathbf{C}}} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\mathbf{D}}}$$

である。

(2) $f(x)$ は，最小値 $\boxed{\mathbf{E}} - \boxed{\mathbf{F}}\sqrt{\boxed{\mathbf{G}}}$ を $x = \dfrac{\boxed{\mathbf{H}}}{\boxed{\mathbf{I}}}\pi$ でとる。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{J}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　文中の $\boxed{\text{A}}$ ～ $\boxed{\text{I}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の性質を用いて，a^{a+1} と $(a+1)^{a}$ の大小関係を調べよう。
ただし，$a>0$ とする。

(1)　$f(x)$ の導関数を求めると

$$f'(x)=\frac{\boxed{\text{A}}-\log x}{x^{\boxed{\text{B}}}}$$

であるから，$f(x)$ が単調増加である x の変域は $\boxed{\text{C}}<x\leqq\boxed{\text{D}}$ であり，
単調減少である x の変域は $\boxed{\text{E}}\leqq x$ である。

(2)　$p=a^{a+1}$，$q=(a+1)^{a}$ とおくと

$$\log p-\log q=\left(a^{\boxed{\text{F}}}+a\right)\left\{f(a)-f\left(a+\boxed{\text{G}}\right)\right\}$$

である。よって

$$0<a<\frac{3}{2}\quad \text{ならば，}\quad p\ \boxed{\text{H}}\ q\ \text{であり}$$
$$3<a\quad \text{ならば，}\quad p\ \boxed{\text{I}}\ q\ \text{である}$$

ことが分かる。

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3
④ e　⑤ $e+1$　⑥ $\dfrac{1}{e}$
⑦ $>$　⑧ $=$　⑨ $<$

注）導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

問 2　$0 < a < 1$ とする。曲線 $y = xe^{2x}$ および x 軸と直線 $x = a - 1$ で囲まれる部分の面積と，曲線 $y = xe^{2x}$ および x 軸と直線 $x = a$ で囲まれる部分の面積の和を $S(a)$ とする。このとき，$S(a)$ を最小とする a の値を求めよう。

xe^{2x} の不定積分は

$$\frac{\boxed{\mathsf{J}}}{\boxed{\mathsf{K}}}\left(\boxed{\mathsf{L}}\,x - 1\right)e^{2x} + C \qquad \left(C\text{ は積分定数}\right)$$

である。

xe^{2x} の値は，$x < 0$ のとき $xe^{2x} < 0$ であり，$x \geqq 0$ のとき $xe^{2x} \geqq 0$ である。したがって，$S(a)$ の値は

$$S(a) = \frac{\boxed{\mathsf{M}}}{\boxed{\mathsf{N}}}\left\{\boxed{\mathsf{O}} + \left(\boxed{\mathsf{P}}\,a - \boxed{\mathsf{Q}}\right)e^{2(a-1)} + \left(\boxed{\mathsf{R}}\,a - 1\right)e^{2a}\right\}$$

である。また

$$S'(a) = \left(a - \boxed{\mathsf{S}}\right)e^{2(a-1)} + ae^{2a}$$

であるから，$S(a)$ を最小とする a の値は $a = \dfrac{\boxed{\mathsf{T}}}{e^2 + \boxed{\mathsf{U}}}$ である。これは $0 < a < 1$ を満たしている。

注）　積分定数：constant of integration

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{V}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。