平成26年度（2014年度）日本留学試験　**問題冊子**

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2．問題文中のA，B，C,…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
(例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

© 2014 Japan Student Services Organization

© 2014 Japan Student Services Organization

数学 コース 1

（基本コース）

（コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

© 2014 Japan Student Services Organization

I

問 1　2 次関数 $y = ax^2 + bx + \dfrac{3}{a}$ は，次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たすとする。

(i)　$x = 3$ のとき，y は最大値をとる。

(ii)　$x = 1$ のとき，y の値は 2 である。

このとき，a, b の値を求めよう。

条件 (i), (ii) を用いて，a, b の関係式

$$\begin{cases} b = \boxed{\mathsf{AB}}\,a \\ \boxed{\mathsf{C}} = a + b + \dfrac{\boxed{\mathsf{D}}}{a} \end{cases}$$

を得る。

上の 2 式より，方程式

$$\boxed{\mathsf{E}}\,a^2 + \boxed{\mathsf{F}}\,a - \boxed{\mathsf{G}} = 0$$

を得る。よって

$$a = \boxed{\mathsf{HI}}, \quad b = \boxed{\mathsf{J}}$$

である。このとき，この関数の最大値は $\boxed{\mathsf{K}}$ である。

© 2014 Japan Student Services Organization

- 計算欄 (memo) -

© 2014 Japan Student Services Organization

問 2　2 つの整式

$$P = 2x^2 - x + 2, \quad Q = x^2 - 2x + 1$$

に対して

$$E = P^2 - 4Q^2 - 3P + 6Q$$

を考える。

(1)　E の右辺を因数分解して

$$E = \left(P - \boxed{\mathbf{L}}\,Q\right)\left(P + \boxed{\mathbf{M}}\,Q - \boxed{\mathbf{N}}\right)$$

を得る。

(2)　E を x の式で表すと

$$E = \boxed{\mathbf{O}}\,x\left(x - \boxed{\mathbf{P}}\right)\left(\boxed{\mathbf{Q}}\,x - \boxed{\mathbf{R}}\right)$$

となる。

(3)　$x = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ のとき，E の値は $\boxed{\mathbf{S}} + \boxed{\mathbf{T}}\sqrt{\boxed{\mathbf{U}}}$ である。

注）因数分解する：factorize

© 2014 Japan Student Services Organization

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{V}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

© 2014 Japan Student Services Organization

II

問 1　1 つの箱に，n 個の赤球と $(20-n)$ 個の白球が入っている。ただし，$0<n<20$ とする。この箱から 1 球取り出し，その球の色を調べて元の箱に戻すという試行を繰り返す。

(1)　1 回の試行で赤球が取り出される確率を x とすると $x=\dfrac{n}{\boxed{\mathsf{AB}}}$ である。

(2)　この試行を 2 回繰り返したとき，少なくとも 1 回は白球が出る確率を p とおく。このとき p を (1) の x を用いて表すと $p=\boxed{\mathsf{C}}-x^{\boxed{\mathsf{D}}}$ となる。

(3)　この試行を 4 回繰り返したとき，少なくとも 2 回は白球が出る確率を q とおく。このとき q を (1) の x を用いて表すと

$$q=\boxed{\mathsf{E}}-\boxed{\mathsf{F}}x^{\boxed{\mathsf{G}}}+\boxed{\mathsf{H}}x^{\boxed{\mathsf{I}}}$$

となる。

(4)　(2), (3) の p, q について，$p<q$ となるような n の最大値を求めよう。

$p<q$ より，不等式

$$\boxed{\mathsf{J}}x^2-\boxed{\mathsf{K}}x+1>0$$

を得る。これを解くと

$$x<\frac{1}{\boxed{\mathsf{L}}}$$

となるから，n の最大値は $\boxed{\mathsf{M}}$ である。

注）　試行：trial

© 2014 Japan Student Services Organization

- 計算欄 (memo) -

© 2014 Japan Student Services Organization

問 2　p を素数とし，x, y を正の整数とする。このとき

$$\frac{p}{x}+\frac{7}{y}=p$$

を満たす p, x, y の組をすべて求めよう。

与えられた式を変形して

$$(x-\boxed{\mathbf{N}})(py-\boxed{\mathbf{O}})=\boxed{\mathbf{P}}$$

を得る。これより

$$x-\boxed{\text{N}}=\boxed{\mathbf{Q}}\quad\text{または}\quad\boxed{\mathbf{R}}\qquad\left(\text{ただし，}\ \boxed{\text{Q}}<\boxed{\text{R}}\right)$$

である。したがって

$$x=\boxed{\mathbf{S}}\quad\text{または}\quad\boxed{\mathbf{T}}\qquad\left(\text{ただし，}\ \boxed{\text{S}}<\boxed{\text{T}}\right)$$

である。

まず，$x=\boxed{\text{S}}$ のとき

$$p=\boxed{\mathbf{U}},\quad y=\boxed{\mathbf{V}}$$

または

$$p=\boxed{\mathbf{W}},\quad y=\boxed{\mathbf{X}}\qquad\left(\text{ただし，}\ \boxed{\text{U}}<\boxed{\text{W}}\right)$$

である。

また，$x=\boxed{\text{T}}$ のとき

$$p=\boxed{\mathbf{Y}},\quad y=\boxed{\mathbf{Z}}$$

である。

© 2014 Japan Student Services Organization

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。

© 2014 Japan Student Services Organization

III

x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。

関数 ① のグラフは 2 点 $(-1,\ -1)$, $(2,\ 2)$ を通るものとする。

(1) b, c を a の式で表すと

$$b = \boxed{\mathsf{A}} - a, \quad c = \boxed{\mathsf{BC}}\,a$$

となる。

(2) 関数 ① のグラフと x 軸との交点のうちの 1 つは，$0 < x \leqq 1$ の範囲内にあるとする。このとき，a の値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{D}} < a \leqq \frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

である。

(3) a の値が ② の範囲内を変化するとき，$a + bc$ の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathsf{GH}}}{\boxed{\mathsf{I}}} \leqq a + bc \leqq \boxed{\mathsf{J}}$$

である。

© 2014 Japan Student Services Organization

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{K}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

© 2014 Japan Student Services Organization

IV

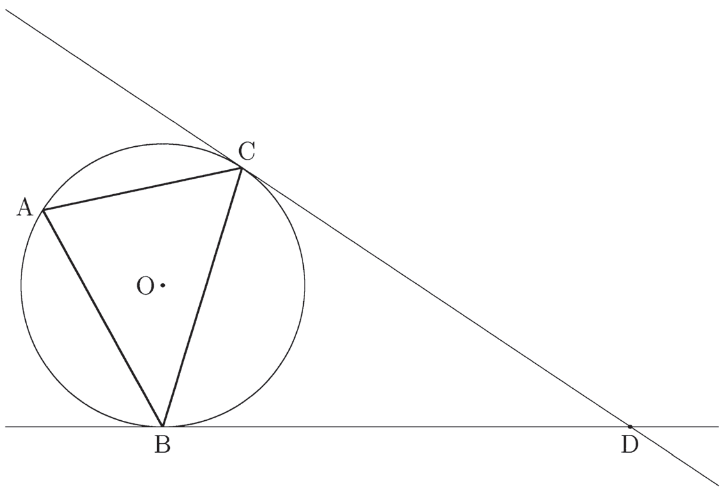
三角形 ABC は

$$AB=7,\quad BC=8,\quad CA=6$$

を満たしている。

三角形 ABC の外接円の中心を O，半径を r とおく。

また，この外接円にそれぞれ点 B, C で接する 2 本の接線を引き，その交点を D とする。



このとき

$$\cos\angle BAC=\frac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}},\qquad \sin\angle BAC=\frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{CD}}}}{\boxed{\mathbf{E}}},$$

$$r=\frac{\boxed{\mathbf{FG}}\sqrt{\boxed{\mathbf{HI}}}}{\boxed{\mathbf{JK}}},\qquad BD=\boxed{\mathbf{LM}}$$

である。

さらに，外接円の円周上に点 P をとるとき，線分 DP の最短の長さは $\dfrac{\boxed{\mathbf{NO}}\sqrt{\boxed{\mathbf{PQ}}}}{\boxed{\mathbf{R}}}$ である。

注） 外接円：circumscribed circle

© 2014 Japan Student Services Organization

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 **S** ～ **Z** はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

© 2014 Japan Student Services Organization

© 2014 Japan Student Services Organization

数学 コース 2

（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを<u>一つだけ</u>選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

<u>**選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。**</u>

© 2014 Japan Student Services Organization

I

問 1　2 次関数 $y = ax^2 + bx + \dfrac{3}{a}$ は，次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たすとする。

(i)　$x = 3$ のとき，y は最大値をとる。

(ii)　$x = 1$ のとき，y の値は 2 である。

このとき，a, b の値を求めよう。

条件 (i), (ii) を用いて，a, b の関係式

$$\begin{cases} b = \boxed{\mathrm{AB}}\,a \\ \boxed{\mathrm{C}} = a + b + \dfrac{\boxed{\mathrm{D}}}{a} \end{cases}$$

を得る。

上の 2 式より，方程式

$$\boxed{\mathrm{E}}\,a^2 + \boxed{\mathrm{F}}\,a - \boxed{\mathrm{G}} = 0$$

を得る。よって

$$a = \boxed{\mathrm{HI}}, \quad b = \boxed{\mathrm{J}}$$

である。このとき，この関数の最大値は $\boxed{\mathrm{K}}$ である。

© 2014 Japan Student Services Organization

- 計算欄 (memo) -

© 2014 Japan Student Services Organization

問 2　2 つの整式

$$P = 2x^2 - x + 2, \quad Q = x^2 - 2x + 1$$

に対して

$$E = P^2 - 4Q^2 - 3P + 6Q$$

を考える。

(1)　E の右辺を因数分解して

$$E = \left(P - \boxed{\mathsf{L}}\,Q\right)\left(P + \boxed{\mathsf{M}}\,Q - \boxed{\mathsf{N}}\right)$$

を得る。

(2)　E を x の式で表すと

$$E = \boxed{\mathsf{O}}\,x\left(x - \boxed{\mathsf{P}}\right)\left(\boxed{\mathsf{Q}}\,x - \boxed{\mathsf{R}}\right)$$

となる。

(3)　$x = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ のとき，E の値は $\boxed{\mathsf{S}} + \boxed{\mathsf{T}}\sqrt{\boxed{\mathsf{U}}}$ である。

注）因数分解する：factorize

© 2014 Japan Student Services Organization

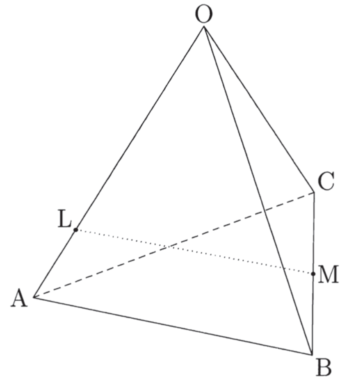
- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{V}}$ 〜 $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

© 2014 Japan Student Services Organization

II

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，線分 OA を 3 : 1 に内分する点を L，線分 BC の中点を M，線分 LM を $t : (1-t)$ に内分する点を P とする。ただし，$0 < t < 1$ とする。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}}\left(\boxed{\mathbf{C}} - t\right)\vec{a} + \frac{\boxed{\mathbf{D}}}{\boxed{\mathbf{E}}}t\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

である。さらに，$\vec{a}\cdot\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \boxed{\mathbf{F}}$，$\left|\vec{b} + \vec{c}\right|^2 = \boxed{\mathbf{G}}$ であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \frac{1}{\boxed{\mathbf{H}}}\sqrt{\boxed{\mathbf{I}}\,t^2 - \boxed{\mathbf{J}}\,t + \boxed{\mathbf{K}}}$$

となる。ただし，$\vec{a}\cdot\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ は $\vec{a}$ と $\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ の内積である。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となるときの t の値を求めると

$$t = \frac{\boxed{\mathbf{L}}}{\boxed{\mathbf{M}}}$$

であり，その $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\mathbf{N}}}}{\boxed{\mathbf{O}}}$ である。

(3) (2) のとき，$\cos\angle\mathrm{AOP} = \dfrac{\boxed{\mathbf{P}}\sqrt{\boxed{\mathbf{Q}}}}{\boxed{\mathbf{R}}}$ である。

注）正四面体 : regular tetrahedron，内分する : divide internally，内積 : inner product

© 2014 Japan Student Services Organization

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{S}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

© 2014 Japan Student Services Organization

III

$a>0$ とする。次の x に関する 2 つの方程式を $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で考える。

$$\sin 2x + a\cos x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$\cos 2x + a\sin x = -2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

例えば，$a=\sqrt{2}$ のとき，① を満たす x は

$$x = \frac{\boxed{\mathsf{AB}}}{\boxed{\mathsf{C}}}\pi$$

である。この x に対して，② の左辺の値は $\boxed{\mathsf{DE}}$ となり，② の等式が成り立たない。

したがって，$a=\sqrt{2}$ のとき，①, ② は共通解をもたない。

そこで，①, ② が共通解をもつような a の値と，そのときの共通解 x を求めよう。

まず，① より

$$\sin x = \frac{\boxed{\mathsf{FG}}}{\boxed{\mathsf{H}}}a, \quad \cos 2x = \boxed{\mathsf{I}} - \frac{a^2}{\boxed{\mathsf{J}}}$$

となる。これらを ② に代入して

$$a^2 = \boxed{\mathsf{K}}$$

を得る。したがって，$a=\sqrt{\boxed{\mathsf{K}}}$ であり，共通解は

$$x = \frac{\boxed{\mathsf{LM}}}{\boxed{\mathsf{N}}}\pi$$

である。

© 2014 Japan Student Services Organization

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{O}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

© 2014 Japan Student Services Organization

IV

問 1　$a > 0$ とする。2 つの曲線

$$C_1:\quad y = e^{6x}$$
$$C_2:\quad y = ax^2$$

を考える。C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本引けるような a の条件を求めよう。

C_1 上の点 (t, e^{6t}) における C_1 の接線の方程式は

$$y = \boxed{\textbf{A}}\, e^{6t}x - e^{6t}\left(\boxed{\textbf{B}}\, t - \boxed{\textbf{C}}\right)$$

である。この接線がさらに C_2 に接するのは，2 次方程式

$$ax^2 = \boxed{\text{A}}\, e^{6t}x - e^{6t}\left(\boxed{\text{B}}\, t - \boxed{\text{C}}\right)$$

が重解をもつときである。したがって，a, t に対して

$$\boxed{\textbf{D}}\, e^{12t} - ae^{6t}\left(\boxed{\textbf{E}}\, t - \boxed{\textbf{F}}\right) = 0$$

が成り立つ。この式より

$$a = \frac{\boxed{\text{D}}\, e^{6t}}{\boxed{\text{E}}\, t - \boxed{\text{F}}}$$

を得る。この右辺を $f(t)$ とおくと，2 つの曲線 C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本引けるための条件は，直線 $s = a$ が $s = f(t)$ のグラフと 2 点で交わることである。

ここで，$f(t)$ の導関数は

$$f'(t) = \frac{108e^{6t}\left(\boxed{\textbf{G}}\, t - \boxed{\textbf{H}}\right)}{\left(\boxed{\text{E}}\, t - \boxed{\text{F}}\right)^2}$$

である。

よって，求める a の条件は

$$a > \boxed{\textbf{I}}\, e^{\boxed{\textbf{J}}}$$

である。ただし，必要であれば $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t} = \infty$ を用いてよい。

注）　導関数：derivative

© 2014 Japan Student Services Organization

- 計算欄 (memo) -

© 2014 Japan Student Services Organization

問 2　次の問題文の $\boxed{\text{K}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

a, t を正の実数とする。x の 2 次関数

$$y = \frac{1}{t^2}\left(x - at^2\right)^2$$

のグラフと x 軸，y 軸によって囲まれる部分を D とする。D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1，また，D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_2 とする。このとき，ある a の値に対して，t の値によらず $V_1 = V_2$ となることを示そう。

まず，V_1 を求めると

$$V_1 = \pi \int_{\boxed{\text{K}}}^{\boxed{\text{L}}} \frac{1}{t^{\boxed{\text{M}}}}\left(x - at^2\right)^{\boxed{\text{N}}} dx$$

$$= \frac{\pi}{\boxed{\text{O}}}\, a^{\boxed{\text{P}}}\, t^{\boxed{\text{Q}}}$$

となる。一方，V_2 を求めると

$$V_2 = \pi \int_{\boxed{\text{K}}}^{\boxed{\text{R}}} \left(\boxed{\text{S}} - \boxed{\text{T}}\sqrt{y}\right)^{\boxed{\text{U}}} dy$$

$$= \frac{\pi}{\boxed{\text{V}}}\, a^{\boxed{\text{W}}}\, t^{\boxed{\text{X}}}$$

となる。

よって，$a = \dfrac{\boxed{\text{Y}}}{\boxed{\text{Z}}}$ のとき，t の値によらず，$V_1 = V_2$ となる。

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ 5	⑥ 6	⑦ t	⑧ at^2	⑨ a^2t^2

© 2014 Japan Student Services Organization

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

© 2014 Japan Student Services Organization