平成26年度（2014年度）日本留学試験　**問題冊子**

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　**どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。**

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

数学 コース 1
(基本コース)

(コース2は 15 ページからです)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　a, b は実数であり，$a > 0$ とする。2 つの 2 次関数

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5, \quad g(x) = x^2 + ax + b$$

を考える。

関数 $g(x)$ が次の 2 つの条件を満たすとき，a, b の値を求めよう。

(i)　$g(x)$ の最小値は $f(x)$ の最小値より 8 だけ小さい

(ii)　$f(x) = g(x)$ を満たす x がただ 1 つ存在する

$f(x)$ の最小値は $\boxed{\mathsf{A}}$ であるから，条件 (i) より，等式

$$b = \frac{a^2}{\boxed{\mathsf{B}}} - \boxed{\mathsf{C}}$$

を得る。

よって，$f(x) = g(x)$ を満たす x を求める方程式は

$$x^2 - (a + \boxed{\mathsf{D}})x - \frac{a^2}{\boxed{\mathsf{E}}} + \boxed{\mathsf{FG}} = 0$$

である。

したがって，条件 (ii) と $a > 0$ より

$$a = \boxed{\mathsf{H}}, \quad b = \boxed{\mathsf{IJ}}$$

を得る。このとき，$f(x) = g(x)$ を満たす x は $\boxed{\mathsf{K}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　集合 $A=\{4m\mid m\text{は自然数}\}$，$B=\{6m\mid m\text{は自然数}\}$ を考える。

(1)　次の $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{O}}$ には，下の ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

n は自然数とする。

(i)　$n\in A$ であることは，n が 2 で割り切れるための $\boxed{\text{L}}$。

(ii)　$n\in B$ であることは，n が 24 で割り切れるための $\boxed{\text{M}}$。

(iii)　$n\in A\cup B$ であることは，n が 3 で割り切れるための $\boxed{\text{N}}$。

(iv)　$n\in A\cap B$ であることは，n が 12 で割り切れるための $\boxed{\text{O}}$。

⓪　必要十分条件である
①　必要条件であるが，十分条件ではない
②　十分条件であるが，必要条件ではない
③　必要条件でも十分条件でもない

(2)　$C=\{m\mid m\text{は}\,1\leqq m\leqq 100\,\text{を満たす自然数}\}$ とする。

$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C$ の要素の個数は $\boxed{\text{PQ}}$ であり，$\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$ の要素の個数は $\boxed{\text{RS}}$ である。ただし，$\overline{A}$，$\overline{B}$ はそれぞれ，全体集合を自然数の全体としたときの A, B の補集合を表す。

注）全体集合：universal set，補集合：complement

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{T}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　単語の POSITION を構成する 8 文字を横一列に並べ替えることを考える。

(1)　2 つの I が隣り合い，2 つの O も隣り合うような並べ方は $\boxed{\textbf{ABC}}$ 通りある。

(2)　2 つの I がそれぞれ左右の両端に位置し，2 つの O が隣り合うような並べ方は $\boxed{\textbf{DEF}}$ 通りある。

(3)　2 つの I がそれぞれ左右の両端に位置するような並べ方は $\boxed{\textbf{GHI}}$ 通りある。

(4)　I, I, O, O の 4 文字だけを横一列に並べる並べ方は $\boxed{\textbf{J}}$ 通りある。また，N, P, S, T の 4 文字だけを横一列に並べる並べ方は $\boxed{\textbf{KL}}$ 通りある。

したがって，8 文字の並べ方のうち，どちらかの端には I か O が位置し，N, P, S, T のどの 2 つの文字も隣り合わないような並べ方は $\boxed{\textbf{MNO}}$ 通りある。

- 計算欄 (memo) -

問 2　整数 x と実数 y が等式

$$2(y+1) = x(8-x) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

と不等式

$$5x - 4y + 1 \leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

の両方を満たしているとする。このとき，y の最大値 M と最小値 m を求めよう。

まず，等式 ① を変形して

$$y = -\frac{1}{\boxed{\mathsf{P}}}\left(x - \boxed{\mathsf{Q}}\right)^2 + \boxed{\mathsf{R}}$$

を得る。また，①, ② より，x についての不等式

$$2x^2 - \boxed{\mathsf{ST}}\,x + \boxed{\mathsf{U}} \leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

を得る。

よって，整数 x が ③ を満たすとき，y のとり得る値の範囲を考えると，y の値は $x = \boxed{\mathsf{V}}$ のとき最大，$x = \boxed{\mathsf{W}}$ のとき最小となり

$$M = \boxed{\mathsf{X}}, \quad m = \frac{\boxed{\mathsf{Y}}}{\boxed{\mathsf{Z}}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。

III

次の問題文中の $\boxed{\mathbf{A}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{D}}$ にはそれぞれ，各設問の下の ⓪ 〜 ⑤ の中から適するものを選びなさい。

3 つの 2 次不等式

$$x^2 + 3x - 18 < 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$x^2 - 2x - 8 > 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

$$x^2 + ax + b < 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

を考える。

(1) 不等式 ① と不等式 ② の両方を満たす x の範囲は $\boxed{\mathbf{A}}$ である。

また，①, ② のどちらの不等式も満たさない x の範囲は $\boxed{\mathbf{B}}$ である。

⓪ $3 \leqq x \leqq 4$　　① $-6 \leqq x \leqq -2$　　② $3 < x < 4$

③ $2 < x < 6$　　④ $-6 < x < -2$　　⑤ $-4 \leqq x \leqq -3$

(2) 不等式 ① と不等式 ③ の少なくとも一方を満たす x の範囲が $-6 < x < 7$ となるのは，a, b が等式 $\boxed{\mathbf{C}}$ を満たし，a が不等式 $\boxed{\mathbf{D}}$ を満たすときである。

⓪ $b = 6a - 36$　　① $b = 7a - 49$　　② $b = -7a - 49$

③ $-10 < a \leqq -3$　　④ $-10 < a \leqq -1$　　⑤ $-1 \leqq a < 3$

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{E}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

円に内接する四角形 ABCD において

$$\mathrm{AB} = \sqrt{2}, \quad \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = 2, \quad \mathrm{DA} = \sqrt{6}$$

とする。

(1)　$\angle \mathrm{BAD} = \theta$ とおくと，2 つの等式

$$\mathrm{BD}^2 = \boxed{\mathbf{A}} - \boxed{\mathbf{B}}\sqrt{\boxed{\mathbf{C}}}\cos\theta$$

$$\mathrm{BD}^2 = \boxed{\mathbf{D}} + \boxed{\mathbf{E}}\cos\theta$$

を得る。よって

$$\theta = \boxed{\mathbf{FG}}^\circ, \quad \mathrm{BD} = \boxed{\mathbf{H}}\sqrt{\boxed{\mathbf{I}}}$$

である。

(2)　$\angle \mathrm{BAC} = \boxed{\mathbf{JK}}^\circ$，$\angle \mathrm{BCA} = \boxed{\mathbf{LM}}^\circ$ であり，$\mathrm{AC} = \boxed{\mathbf{N}} + \sqrt{\boxed{\mathbf{O}}}$ である。

また

$$\sin\angle \mathrm{ADC} = \frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{P}}}\left(\sqrt{\boxed{\mathbf{Q}}} + \boxed{\mathbf{R}}\right)}{\boxed{\mathbf{S}}}$$

である。

(3)　直線 AD と直線 BC の交点を E とすると，$\mathrm{EB} = \boxed{\mathbf{T}} + \boxed{\mathbf{U}}\sqrt{\boxed{\mathbf{V}}}$ である。

注）　内接する：be inscribed

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{W}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\mathrm{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　a, b は実数であり，$a > 0$ とする。2 つの 2 次関数

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5, \quad g(x) = x^2 + ax + b$$

を考える。

関数 $g(x)$ が次の 2 つの条件を満たすとき，a, b の値を求めよう。

(i)　$g(x)$ の最小値は $f(x)$ の最小値より 8 だけ小さい

(ii)　$f(x) = g(x)$ を満たす x がただ 1 つ存在する

$f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{A}}$ であるから，条件 (i) より，等式

$$b = \frac{a^2}{\boxed{\text{B}}} - \boxed{\text{C}}$$

を得る。

よって，$f(x) = g(x)$ を満たす x を求める方程式は

$$x^2 - (a + \boxed{\text{D}})x - \frac{a^2}{\boxed{\text{E}}} + \boxed{\text{FG}} = 0$$

である。

したがって，条件 (ii) と $a > 0$ より

$$a = \boxed{\text{H}}, \quad b = \boxed{\text{IJ}}$$

を得る。このとき，$f(x) = g(x)$ を満たす x は $\boxed{\text{K}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　集合 $A=\{4m \mid m \text{ は自然数}\}$，$B=\{6m \mid m \text{ は自然数}\}$ を考える。

(1)　次の $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{O}}$ には，下の ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

n は自然数とする。

(i)　$n \in A$ であることは，n が 2 で割り切れるための $\boxed{\text{L}}$。

(ii)　$n \in B$ であることは，n が 24 で割り切れるための $\boxed{\text{M}}$。

(iii)　$n \in A \cup B$ であることは，n が 3 で割り切れるための $\boxed{\text{N}}$。

(iv)　$n \in A \cap B$ であることは，n が 12 で割り切れるための $\boxed{\text{O}}$。

⓪　必要十分条件である
①　必要条件であるが，十分条件ではない
②　十分条件であるが，必要条件ではない
③　必要条件でも十分条件でもない

(2)　$C=\{m \mid m \text{ は } 1 \leqq m \leqq 100 \text{ を満たす自然数}\}$ とする。

$(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C$ の要素の個数は $\boxed{\text{PQ}}$ であり，$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ の要素の個数は $\boxed{\text{RS}}$ である。ただし，$\overline{A}$, $\overline{B}$ はそれぞれ，全体集合を自然数の全体としたときの A, B の補集合を表す。

注）　全体集合：universal set，補集合：complement

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{T}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

点 O を中心とし，半径 1 の円の周を S とする。

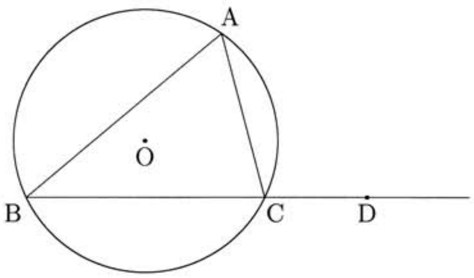
三角形 ABC は，すべての頂点が S 上にあり，AB : AC = 3 : 2 を満たすとする。図のように辺 BC の延長線上に点 D をとり

$$\mathrm{BC} : \mathrm{CD} = 2 : k$$

とおく。また

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$$

とする。このとき，次の問いに答えなさい。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \left(\frac{k}{\boxed{\mathbf{A}}} + \boxed{\mathbf{B}} \right) \vec{c} - \frac{k}{\boxed{\mathbf{C}}} \vec{b}$$

である。

(2) 等式

$$\left| \vec{b} - \vec{a} \right| = \frac{\boxed{\mathbf{D}}}{\boxed{\mathbf{E}}} \left| \vec{c} - \vec{a} \right|$$

が成り立つので，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ を用いて表すと

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\mathbf{F}}}{\boxed{\mathbf{G}}} \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{\boxed{\mathbf{H}}}{\boxed{\mathbf{I}}}$$

である。

(3) 点 A における S の接線が点 D を通るとき

$$k = \frac{\boxed{\mathbf{J}}}{\boxed{\mathbf{K}}}$$

である。

注） 内積 : inner product

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathbf{L}\ }$ ～ $\boxed{\ \mathbf{Z}\ }$ はマークしないでください。

III

$p>1$, $q>1$ とする。方程式

$$e^{2x}-ae^{x}+b=0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

において，$t=e^x$ とおくとき，t に関する 2 次方程式

$$t^2-at+b=0$$

は解 $\log_{q^2}p$ と $\log_{p^3}q$ をもつとする。

このとき，a の最小値とそのときの方程式 ① の解を求めよう。

(1)　まず

$$b=\frac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}}$$

であり

$$a=\frac{\boxed{\mathbf{C}}}{\boxed{\mathbf{D}}}\log_q p+\frac{\boxed{\mathbf{E}}}{\boxed{\mathbf{F}}}\log_p q$$

である。

(2)　p, q が $p>1$, $q>1$ を満たしながら動くとき，$\log_p q>\boxed{\mathbf{G}}$ である。

したがって，a は最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\mathbf{H}}}}{\boxed{\mathbf{I}}}$ を $\log_p q=\dfrac{\sqrt{\boxed{\mathbf{J}}}}{\boxed{\mathbf{K}}}$ のときにとる。

そのときの方程式 ① の解は

$$x=-\frac{\boxed{\mathbf{L}}}{\boxed{\mathbf{M}}}\log_e\boxed{\mathbf{N}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{O}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

$\boxed{\text{IV}}$

問 1　a, t は共に正の実数とする。関数 $y = ax^3$ のグラフ C の点 P (t, at^3) における接線 ℓ が C と再び交わる点を Q とする。さらに，点 P を通って x 軸に平行な直線 p と点 Q を通って y 軸に平行な直線 q が交わる点を R とする。

いま，曲線 C と直線 p，直線 q によって囲まれる部分の面積を S_1，曲線 C と接線 ℓ によって囲まれる部分の面積を S_2 で表すとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよう。

まず，接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\mathbf{A}}\, at^{\boxed{\mathbf{B}}} x - \boxed{\mathbf{C}}\, at^{\boxed{\mathbf{D}}}$$

であるから，点 Q の x 座標は $-\boxed{\mathbf{E}}\, t$ である。

したがって，S_1 を求めると

$$S_1 = \frac{\boxed{\mathbf{FG}}}{\boxed{\mathbf{H}}}\, at^{\boxed{\mathbf{I}}}$$

となる。また，S_2 は三角形 PQR の面積から S_1 を引いたものであるから

$$S_2 = \frac{\boxed{\mathbf{JK}}}{\boxed{\mathbf{L}}}\, at^{\boxed{\mathbf{M}}}$$

である。

よって，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値は a, t の値に関係なく，常に

$$\frac{S_1}{S_2} = \boxed{\mathbf{N}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　x の関数

$$f_n(x) = \sin^n x \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

について次の問いに答えなさい。

(1)　次の等式が成り立つ場合を考える。ただし，a, b, c は実数である。

$$\lim_{x \to 0} \frac{a - x^2 - (b - x^2)^2}{f_n(x)} = c$$

(i)　$a = b^{\boxed{\text{O}}}$ である。

(ii)　$n = 2$ のとき，$c = 6$ ならば $b = \dfrac{\boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{Q}}}$ である。

(iii)　$n = 4$ のとき，$b = \dfrac{\boxed{\text{R}}}{\boxed{\text{S}}}$，$c = -\boxed{\text{T}}$ である。

（問 2 は次ページに続く）

(2)　この $f_n(x)$ を用いて，定積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\sin 2x\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を考える。

積分の計算をすると

$$I_n = \frac{\boxed{\mathsf{U}}}{n + \boxed{\mathsf{V}}}$$

である。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\left(I_{n-1} + I_n + I_{n+1} + \cdots + I_{2n-2}\right) = \int_0^{\boxed{\mathsf{W}}} \frac{\boxed{\mathsf{X}}}{\boxed{\mathsf{Y}} + x}\,dx$$

$$= \log \boxed{\mathsf{Z}}$$

である。

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。