問題冊子

平成23年度（2011年度）日本留学試験

数学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら手をあげて知らせてください。

5．問題冊子には，メモや計算などを書いてもいいです。

III　解答用紙に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。

2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

解答方法に関する注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例：$\sqrt{12}$ のときは，$2\sqrt{3}$ と答えます。)

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
(例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3)　$\frac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，以下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

3．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*					*					
名　　前													

数学 コース 1
（基本コース）

（コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　x, y は

$$3x + y = 18, \quad x \geqq 1, \quad y \geqq 6$$

を満たすとする。このとき，xy の最大値と最小値を求めよう。

xy を x で表すと

$$xy = \boxed{\mathsf{AB}}\left(x - \boxed{\mathsf{C}}\right)^2 + \boxed{\mathsf{DE}}$$

である。

また，x のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{F}} \leqq x \leqq \boxed{\mathsf{G}}$$

である。

よって，xy の値は

$x = \boxed{\mathsf{H}}$ のとき最大となり，その値は $\boxed{\mathsf{IJ}}$

$x = \boxed{\mathsf{K}}$ のとき最小となり，その値は $\boxed{\mathsf{LM}}$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　正の実数 a, b は

$$a^2 = 3 + \sqrt{5}, \quad b^2 = 3 - \sqrt{5}$$

を満たすとする。$a + b$ の小数部分を c とするとき，$\dfrac{1}{c} - c$ の値を求めよう。

(1)　$(ab)^2 = \boxed{\mathsf{N}}$，$(a+b)^2 = \boxed{\mathsf{OP}}$ である。

(2)　$\boxed{\mathsf{Q}} < a + b < \boxed{\mathsf{Q}} + 1$ であるから，c の値は $\sqrt{\boxed{\mathsf{RS}}} - \boxed{\mathsf{T}}$ である。

よって，$\dfrac{1}{c} - c = \boxed{\mathsf{U}}$ となる。

注）小数部分：fractional portion

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{V}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　1 から 9 までの整数が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードが，箱の中に入っている。その箱の中から 2 枚のカードを同時に取り出す。

取り出された 2 枚のカードに書かれている数の和を S とおく。

(1)　S が 5 以下になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$ である。いま，S が 5 以下のときは得点として $10-S$ を与え，S が 5 より大きいときは得点として 2 を与えるものとする。このとき，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{CD}}}{\boxed{\text{EF}}}$ である。

(2)　箱の中から 2 枚のカードを同時に取り出す試行を 2 回行う。ただし，1 回目に取り出した 2 枚のカードは 2 回目を行う前に箱に戻すものとする。

(i)　2 回とも S が 5 以下になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{HI}}}$ である。

(ii)　少なくとも 1 回は，S が 5 以下になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{LM}}}$ である。

注）期待値：expected value，試行：trial

- 計算欄 (memo) -

問 2　a は定数とする。x の 2 つの関数

$$f(x) = 2x^2 + x + a - 2$$
$$g(x) = -4x - 5$$

に対して，$f(x) = g(x)$ となるような実数 x と，そのときの関数の値を調べよう。

(1)　次の文中の $\boxed{\text{N}}$, $\boxed{\text{O}}$, $\boxed{\text{P}}$ には，下の ⓪ ～ ⑧ のうちから適するものを選びなさい。

$\boxed{\text{N}}$ のとき，$f(x) = g(x)$ となるような実数 x は 2 つ存在する。

$\boxed{\text{O}}$ のとき，$f(x) = g(x)$ となるような実数 x はただ 1 つ存在する。

$\boxed{\text{P}}$ のとき，$f(x) = g(x)$ となるような実数 x は存在しない。

⓪ $a > \frac{1}{8}$　① $a = \frac{17}{8}$　② $a = \frac{1}{6}$　③ $a < \frac{1}{6}$　④ $a < \frac{17}{8}$
⑤ $a < \frac{1}{8}$　⑥ $a > \frac{1}{6}$　⑦ $a = \frac{1}{8}$　⑧ $a > \frac{17}{8}$

(2)　$\boxed{\text{N}}$ のとき，$f(x) = g(x)$ となる x は $\dfrac{-\boxed{\text{Q}} \pm \sqrt{\boxed{\text{R}} - \boxed{\text{S}}\,a}}{\boxed{\text{T}}}$ であって，そのときの 2 つの関数の値は $\mp\sqrt{\boxed{\text{U}} - \boxed{\text{V}}\,a}$ (複号同順) である。

$\boxed{\text{O}}$ のとき，$f(x) = g(x)$ となる x は $-\dfrac{\boxed{\text{W}}}{\boxed{\text{X}}}$ であって，そのときの 2 つの関数の値は $\boxed{\text{Y}}$ である。

(3)　$f(x) = g(x)$ となるような x における 2 つの関数の値の絶対値が 3 以上になる条件は，$a \leqq -\boxed{\text{Z}}$ である。

注）絶対値：absolute value

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。

III

a は定数とし，x の 2 次関数

$$y = 2x^2 + ax + 3 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。① のグラフの頂点は第 1 象限にあるとする。

(1)　a のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{AB}}\sqrt{\boxed{\mathsf{C}}} < a < \boxed{\mathsf{D}}$$

であり，この不等式を満たす最小の整数 a は $\boxed{\mathsf{EF}}$ である。

(2)　① において，$a = \boxed{\mathsf{EF}}$ とし，① のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{1}{n}$，y 軸方向に $\dfrac{6}{n^2}$ だけ平行移動したグラフの方程式を

$$y = 2x^2 + px + q$$

とする。このとき

$$p = \frac{\boxed{\mathsf{G}}}{n} - \boxed{\mathsf{H}}, \qquad q = \frac{\boxed{\mathsf{I}}}{n^2} - \frac{\boxed{\mathsf{J}}}{n} + \boxed{\mathsf{K}}$$

である。

(3)　(2) において p が整数となる自然数 n は，全部で $\boxed{\mathsf{L}}$ 個ある。

これらの n のうち q の値も整数となるものを考える。このとき，q が最小となるのは $n = \boxed{\mathsf{M}}$ のときであり，その値は $q = \boxed{\mathsf{N}}$ である。

注）第 1 象限：first (upper right-hand) quadrant

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{O}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

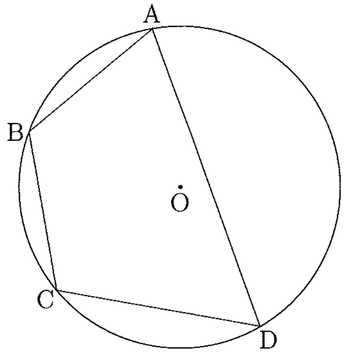
四角形 ABCD は円 O に内接し

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \sqrt{2}, \quad \mathrm{BD} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$$

を満たしている。ただし

$$\mathrm{AD} > \mathrm{CD} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

とする。



(1)　$\mathrm{AC} = \sqrt{\boxed{\mathsf{A}}}$ であり，円 O の半径は $\sqrt{\boxed{\mathsf{B}}}$ である。

(2)　$\mathrm{AD} = x$ とおく。$\angle\mathrm{ADB} = \boxed{\mathsf{CD}}^\circ$ であるから，x は

$$4x^2 - \boxed{\mathsf{EF}}\,x + \boxed{\mathsf{GH}} = 0$$

を満たす。

また，$\mathrm{CD} = y$ とおくと，同様にして，y は

$$4y^2 - \boxed{\mathsf{IJ}}\,y + \boxed{\mathsf{KL}} = 0$$

を満たす。

以上より，① に注意すれば

$$\mathrm{AD} = \frac{\boxed{\mathsf{M}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{N}}}}{\boxed{\mathsf{O}}}, \qquad \mathrm{CD} = \frac{\boxed{\mathsf{P}} - \sqrt{\boxed{\mathsf{Q}}}}{\boxed{\mathsf{R}}}$$

が得られる。

注）内接する：be inscribed

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{S}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　x, y は

$$3x + y = 18, \quad x \geqq 1, \quad y \geqq 6$$

を満たすとする。このとき，xy の最大値と最小値を求めよう。

xy を x で表すと

$$xy = \boxed{\mathsf{AB}}\left(x - \boxed{\mathsf{C}}\right)^2 + \boxed{\mathsf{DE}}$$

である。

また，x のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{F}} \leqq x \leqq \boxed{\mathsf{G}}$$

である。

よって，xy の値は

$x = \boxed{\mathsf{H}}$ のとき最大となり，その値は $\boxed{\mathsf{IJ}}$

$x = \boxed{\mathsf{K}}$ のとき最小となり，その値は $\boxed{\mathsf{LM}}$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　正の実数 $a,\ b$ は

$$a^2 = 3+\sqrt{5}, \quad b^2 = 3-\sqrt{5}$$

を満たすとする。$a+b$ の小数部分を c とするとき，$\dfrac{1}{c}-c$ の値を求めよう。

(1)　$(ab)^2 = \boxed{\mathsf{N}}$，$(a+b)^2 = \boxed{\mathsf{OP}}$ である。

(2)　$\boxed{\mathsf{Q}} < a+b < \boxed{\mathsf{Q}}+1$ であるから，c の値は $\sqrt{\boxed{\mathsf{RS}}} - \boxed{\mathsf{T}}$ である。

よって，$\dfrac{1}{c}-c = \boxed{\mathsf{U}}$ となる。

注）小数部分：fractional portion

－ 計算欄 (memo) －

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{V}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

数列 $\{a_n\}$ が次の条件

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = 2{a_n}^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たすとき，$a_n < 10^{60}$ となるような自然数 n の個数を求めよう。ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

条件より，すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であることがいえる。よって，① の両辺の常用対数を考えると

$$\log_{10} a_{n+1} = \log_{10} \boxed{\mathbf{A}} + \boxed{\mathbf{B}} \log_{10} a_n$$

を得る。ここで，$b_n = \log_{10} a_n + \log_{10} \boxed{\mathrm{A}}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は公比が $\boxed{\mathbf{C}}$ の等比数列となる。よって

$$\log_{10} a_n = \left(\boxed{\mathbf{D}}^{\,n-1} - \boxed{\mathbf{E}}\right) \log_{10} \boxed{\mathbf{F}}$$

を得る。さらに，$a_n < 10^{60}$ より

$$\boxed{\mathrm{D}}^{\,n-1} < \frac{\boxed{\mathbf{GH}}}{\log_{10} \boxed{\mathrm{F}}} + \boxed{\mathrm{E}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

が得られる。この不等式 ② の右辺の値より大きい自然数の中で最小のものは $\boxed{\mathbf{IJK}}$ であるから，$a_n < 10^{60}$ を満たす自然数 n は $\boxed{\mathbf{L}}$ 個ある。

注）常用対数 : common logarithm，公比 : common ratio，等比数列 : geometric progression

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{M}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

次の 2 つの方程式

$$\left(\log_4 2\sqrt{x}\,\right)^2+\left(\log_4 2\sqrt{y}\,\right)^2=\log_2\left(\sqrt[4]{2}\cdot x\sqrt{y}\,\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{y}=2^k \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を考える。①, ② を同時に満たす正の実数 x, y が存在するとき，定数 k のとり得る値の範囲を求めよう。

$\log_2 x=X$, $\log_2 y=Y$ とおき，①, ② を X, Y を用いて表す。まず，① を考えよう。

$$\log_4 2\sqrt{x}=\frac{\log_2 x+\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}$$

および

$$\log_2\left(\sqrt[4]{2}\cdot x\sqrt{y}\,\right)=\frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}+\log_2 x+\frac{\log_2 y}{\boxed{\mathsf{E}}}$$

より，① は

$$\left(X-\boxed{\mathsf{F}}\right)^2+\left(Y-\boxed{\mathsf{G}}\right)^2=\boxed{\mathsf{HI}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

となる。② も同様にして

$$4X+\boxed{\mathsf{J}}\,Y=\boxed{\mathsf{KL}}\,k \quad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

となる。

XY平面上で考えると，円 ③ の中心から直線 ④ への距離 d は

$$d=\frac{\left|\boxed{\mathsf{MN}}-\boxed{\mathsf{OP}}\,k\right|}{\boxed{\mathsf{Q}}}$$

であるから，k のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{R}}\leqq k\leqq\boxed{\mathsf{S}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{T}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　$f(x) = \int_0^{2x} (t^2 - x^2) \sin 3t \, dt$ を x について微分しよう。

(1)　一般に，連続関数 $g(t)$ の原始関数の 1 つを $G(t)$ とするとき

$$\int_0^{2x} g(t)\ dt = G(2x) - G(0)$$

である。この両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} g(t)\ dt = \boxed{\mathsf{A}}$$

となる。ただし，$\boxed{\mathsf{A}}$ には次の ⓪ ～ ⑦ の中から適するものを選びなさい。

⓪ $g(x)$　① $\dfrac{1}{2}g(x)$　② $2g(x)$　③ $g(2x)$

④ $\dfrac{1}{2}g(2x)$　⑤ $2g(2x)$　⑥ $g(x) - g(0)$　⑦ $g(2x) - g(0)$

(2)　$f(x) = \int_0^{2x} t^2 \sin 3t\ dt - \int_0^{2x} x^2 \sin 3t\ dt$ であり

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} t^2 \sin 3t\ dt = \boxed{\mathsf{B}}\, x^2 \sin \boxed{\mathsf{C}}\, x$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} x^2 \sin 3t\ dt = \frac{\boxed{\mathsf{D}}}{\boxed{\mathsf{E}}}\, x \left(-\cos \boxed{\mathsf{F}}\, x + \boxed{\mathsf{G}} + \boxed{\mathsf{H}}\, x \sin \boxed{\mathsf{I}}\, x\right)$$

であるから

$$f'(x) = \frac{\boxed{\mathsf{D}}}{\boxed{\mathsf{E}}}\, x \left(\cos \boxed{\mathsf{J}}\, x - \boxed{\mathsf{K}} + \boxed{\mathsf{L}}\, x \sin \boxed{\mathsf{M}}\, x\right)$$

である。

注）連続関数：continuous function，原始関数：primitive function

\- 計算欄 (memo) -

問 2　a は正の実数とする。2 つの曲線

$$C_1 : y = \frac{3}{x}$$

$$C_2 : y = \frac{a}{x^2}$$

の交点を P とし，C_2 の点 P における接線を ℓ とする。C_1 と ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよう。

P の座標は $\left(\dfrac{a}{\boxed{\mathsf{N}}}, \dfrac{\boxed{\mathsf{O}}}{a} \right)$ であるから，ℓ の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{\mathsf{PQ}}}{a^2}x + \frac{\boxed{\mathsf{RS}}}{a}$$

である。

したがって，S は

$$p = \frac{a}{\boxed{\mathsf{T}}}, \qquad q = \frac{a}{\boxed{\mathsf{U}}} \qquad (p < q)$$

とおくとき

$$S = \Big[\boxed{\mathsf{V}} \Big]_p^q$$

を計算することによって求まる。ただし，$\boxed{\mathsf{V}}$ には，下の ⓪ ～ ⑤ の中から適するものを選びなさい。

よって

$$S = \frac{\boxed{\mathsf{W}}}{\boxed{\mathsf{X}}} - 3\log \boxed{\mathsf{Y}}$$

である。

⓪ $\dfrac{18}{a^2}x^2 - \dfrac{27}{a}x + 3\log|x|$　① $\dfrac{9}{a^2}x^2 - \dfrac{9}{a}x + 3\log|x|$

② $-\dfrac{27}{a^2}x^2 + \dfrac{18}{a}x - 3\log|x|$　③ $-\dfrac{27}{a^2}x^2 + \dfrac{27}{a}x - 3\log|x|$

④ $\dfrac{27}{a^2}x^2 - \dfrac{27}{a}x + 3\log|x|$　⑤ $-\dfrac{18}{a^2}x^2 + \dfrac{27}{a}x - 3\log|x|$

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース2の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース2」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。