問題冊子

平成23年度（2011年度）日本留学試験

数 学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１〜13ページ，コース２は15〜27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．問題冊子には，メモや計算などを書いてもいいです。

Ⅲ　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。

2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，0から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{12}$ のときは，$2\sqrt{3}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，以下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{DE}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

3．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

数学 コース 1
（基本コース）

（コース2は 15 ページからです）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
●	○

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 つの実数 a, b が

$$a^3 = \frac{1}{\sqrt{5}-2}, \quad b^3 = 2-\sqrt{5}$$

を満たすとき，$a+b$ の値を求めよう。

$a+b=x$ とおくと

$$x^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + \boxed{\text{A}}\,ab(a+b)$$

となる。また，$ab = \boxed{\text{BC}}$ であるから，この x は

$$x^3 + \boxed{\text{D}}\,x - \boxed{\text{E}} = 0$$

を満たすことが分かる。この方程式の左辺は

$$\begin{aligned} x^3 + \boxed{\text{D}}\,x - \boxed{\text{E}} &= \left(x^3 - \boxed{\text{F}}\right) + \boxed{\text{D}}\left(x - \boxed{\text{F}}\right) \\ &= \left(x - \boxed{\text{F}}\right)\left(x^2 + x + \boxed{\text{G}}\right) \end{aligned}$$

と因数分解できる。ここで

$$x^2 + x + \boxed{\text{G}} = \left(x + \frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}\right)^2 + \frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}} > 0$$

であるから，$x = a+b = \boxed{\text{M}}$ を得る。

注）因数分解する：factorize

- 計算欄 (memo) -

問 2　2 つの関数 $y = x^2 + ax + a$ と $y = x + 1$ を考える。

(1)　2 つの関数のグラフの共有点の個数は，下記のように a と数 $\boxed{\text{Q}}$，$\boxed{\text{R}}$ との関係によって定まる。次の文中の $\boxed{\text{N}}$ ～ $\boxed{\text{P}}$ には，下の ⓪ ～ ② から適するものを選びなさい。

(i)　2 つの関数のグラフが異なる 2 点で交わるための条件は $\boxed{\text{N}}$ である。

(ii)　2 つの関数のグラフが 1 点で接するための条件は $\boxed{\text{O}}$ である。

(iii)　$y = x^2 + ax + a$ のグラフがつねに $y = x + 1$ のグラフの上方にあるための条件は $\boxed{\text{P}}$ である。

⓪　$\boxed{\text{Q}} < a < \boxed{\text{R}}$

①　$a = \boxed{\text{Q}}$　または　$a = \boxed{\text{R}}$

②　$a < \boxed{\text{Q}}$　または　$\boxed{\text{R}} < a$

(2)　a の値が条件 $\boxed{\text{P}}$ を満たすとき，2 つの関数の値の差 $g(x) = x^2 + ax + a - (x + 1)$ の最小値 m を考えよう。このとき，m は

$$m = -\frac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}(a^2 - \boxed{\text{U}}\,a + \boxed{\text{V}})$$

と表される。この m が最大となるのは $a = \boxed{\text{W}}$ のときであり，その値は $m = \boxed{\text{X}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{Y}}$, $\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　1 から 6 までの番号がつけられた 6 つの箱がある。これらの箱に大きさの異なる 4 個の球を入れる。

(1)　球の入れ方は全部で $\boxed{\mathrm{A}}^{\boxed{\mathrm{B}}}$ 通りある。

(2)　4 個の球を別々に 4 つの箱に入れる方法は $\boxed{\mathrm{CDE}}$ 通りある。

(3)　4 個の球のうち 3 個を 1 つの箱に入れ，残りの 1 個の球を他の箱に入れる方法は $\boxed{\mathrm{FGH}}$ 通りある。

(4)　1 番の箱に少なくとも 1 個の球を入れる方法は $\boxed{\mathrm{IJK}}$ 通りある。

- 計算欄 (memo) -

問 2　x の 2 次方程式

$$x^2 + (4a-6)x + 2a + b + 5 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

が 1 つの解として -1 をもち，他の解が不等式

$$|x + 2a| < a + 1 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を満たすための条件を求めよう。

(1)　方程式 ① が，1 つの解として -1 を もつための条件は

$$b = \boxed{\mathsf{L}}\,a - \boxed{\mathsf{MN}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

である。また，他の解を α とおき，a を用いて表すと

$$\alpha = \boxed{\mathsf{OP}}\,a + \boxed{\mathsf{Q}}$$

となる。

(2)　$a > \boxed{\mathsf{RS}}$ のとき不等式 ② は解をもち，その解は

$$\boxed{\mathsf{TU}}\,a - \boxed{\mathsf{V}} < x < -a + \boxed{\mathsf{W}}$$

である。したがって，求める条件は a と b が ③ を満たし，a が

$$\boxed{\mathsf{X}} < a < \boxed{\mathsf{Y}}$$

を満たすことである。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

2つの2次関数

$$y = 2x^2 + 3ax + 4b \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$y = bx^2 + cx + d \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を考える。① と ② のグラフは原点に関して互いに対称であるとする。

(1) 原点に関する対称性から

$$b = \boxed{\mathrm{AB}}, \quad c = \boxed{\mathrm{C}}\,a, \quad d = \boxed{\mathrm{D}}$$

である。よって，② は

$$y = \boxed{\mathrm{AB}}\,x^2 + \boxed{\mathrm{C}}\,ax + \boxed{\mathrm{D}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

となる。

(2) $0 < a < 1$ とし，③ のグラフを考える。

x の値の範囲が $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ であれば，③ の y の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathrm{E}}}{\boxed{\mathrm{F}}}\,a + \frac{\boxed{\mathrm{G}}}{\boxed{\mathrm{H}}} \leqq y \leqq \frac{\boxed{\mathrm{I}}}{\boxed{\mathrm{J}}}\,a^2 + \boxed{\mathrm{K}}$$

である。

(3) a がどのような値をとっても ③ のグラフの頂点はつねに2次関数

$$y = \boxed{\mathrm{L}}\,x^2 + \boxed{\mathrm{M}}$$

のグラフの上にある。

注） 対称：symmetry

\- 計算欄 (memo) -

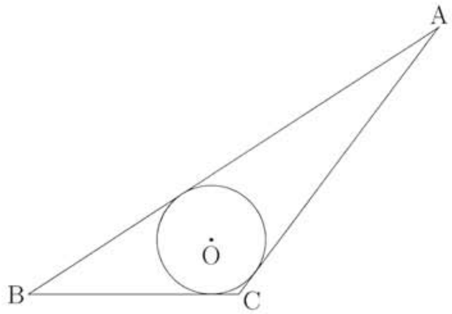
$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{N}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

三角形 ABC は

$$\mathrm{AB} = 10, \qquad \angle\mathrm{B} = 30^\circ$$

を満たし，その内接円 O の半径は 1 とする。



(1)　BC $= a$，CA $= b$ とおく。三角形 ABC の面積 S は 2 通りの方法で求められ

$$S = \frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}\,a$$

$$S = \frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}\left(a + b + \boxed{\mathsf{EF}}\right)$$

と表される。したがって

$$b = \boxed{\mathsf{G}}\,a - \boxed{\mathsf{HI}}$$

である。さらに，a と b の間には

$$b^2 = a^2 - \boxed{\mathsf{JK}}\sqrt{\boxed{\mathsf{L}}}\,a + \boxed{\mathsf{MNO}}$$

が成り立つので

$$a = \frac{\boxed{\mathsf{PQ}} - \boxed{\mathsf{R}}\sqrt{\boxed{\mathsf{S}}}}{3}, \qquad b = \frac{\boxed{\mathsf{TU}} - \boxed{\mathsf{V}}\sqrt{\boxed{\mathsf{W}}}}{3}$$

である。

(2)　2 点 A, O を通る直線と線分 BC との交点を D とする。また，三角形 OBC の面積を S' とおく。このとき

$$S : S' = \boxed{\mathsf{X}} : 1$$

であるから

$$\mathrm{AO} : \mathrm{OD} = \boxed{\mathsf{Y}} : 1$$

である。

注）　内接円：inscribed circle

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース1の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース1」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 つの実数 a, b が

$$a^3 = \frac{1}{\sqrt{5}-2}, \quad b^3 = 2-\sqrt{5}$$

を満たすとき，$a+b$ の値を求めよう。

$a+b=x$ とおくと

$$x^3 = (a+b)^3 = a^3+b^3+\boxed{\mathsf{A}}\,ab(a+b)$$

となる。また，$ab = \boxed{\mathsf{BC}}$ であるから，この x は

$$x^3+\boxed{\mathsf{D}}\,x-\boxed{\mathsf{E}}=0$$

を満たすことが分かる。この方程式の左辺は

$$\begin{aligned} x^3+\boxed{\mathsf{D}}\,x-\boxed{\mathsf{E}} &= \left(x^3-\boxed{\mathsf{F}}\right)+\boxed{\mathsf{D}}\left(x-\boxed{\mathsf{F}}\right) \\ &= \left(x-\boxed{\mathsf{F}}\right)\left(x^2+x+\boxed{\mathsf{G}}\right) \end{aligned}$$

と因数分解できる。ここで

$$x^2+x+\boxed{\mathsf{G}} = \left(x+\frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}\right)^2+\frac{\boxed{\mathsf{JK}}}{\boxed{\mathsf{L}}} > 0$$

であるから，$x=a+b=\boxed{\mathsf{M}}$ を得る。

注）因数分解する：factorize

- 計算欄 (memo) -

問 2　2 つの関数 $y=x^2+ax+a$ と $y=x+1$ を考える。

(1)　2 つの関数のグラフの共有点の個数は，下記のように a と数 $\boxed{\mathrm{Q}}$，$\boxed{\mathrm{R}}$ との関係によって定まる。次の文中の $\boxed{\mathrm{N}}$ ～ $\boxed{\mathrm{P}}$ には，下の ⓪ ～ ② から適するものを選びなさい。

(i)　2 つの関数のグラフが異なる 2 点で交わるための条件は $\boxed{\mathrm{N}}$ である。

(ii)　2 つの関数のグラフが 1 点で接するための条件は $\boxed{\mathrm{O}}$ である。

(iii)　$y=x^2+ax+a$ のグラフがつねに $y=x+1$ のグラフの上方にあるための条件は $\boxed{\mathrm{P}}$ である。

⓪　$\boxed{\mathrm{Q}} < a < \boxed{\mathrm{R}}$

①　$a = \boxed{\mathrm{Q}}$　または　$a = \boxed{\mathrm{R}}$

②　$a < \boxed{\mathrm{Q}}$　または　$\boxed{\mathrm{R}} < a$

(2)　a の値が条件 $\boxed{\mathrm{P}}$ を満たすとき，2 つの関数の値の差 $g(x)=x^2+ax+a-(x+1)$ の最小値 m を考えよう。このとき，m は

$$m = -\frac{\boxed{\mathrm{S}}}{\boxed{\mathrm{T}}}\left(a^2-\boxed{\mathrm{U}}\,a+\boxed{\mathrm{V}}\right)$$

と表される。この m が最大となるのは $a=\boxed{\mathrm{W}}$ のときであり，その値は $m=\boxed{\mathrm{X}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わりです。I の解答欄 $\boxed{\text{Y}}$, $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。	

II

O を原点とする座標平面上に 4 点

$$\mathrm{A}(1,0),\quad \mathrm{B}(0,1),\quad \mathrm{C}(3,0),\quad \mathrm{D}(0,2)$$

をとり，線分 AB, CD 上に，それぞれ点 P, Q を

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{CQ}:\mathrm{QD}=k:2$$

となるようにとる。このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよう。

(1)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(x, y)$ とおき，$x+2y$ の値を求めよう。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\mathbf{A}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{k+\boxed{\mathbf{B}}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\boxed{\mathbf{C}}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{k+\boxed{\mathbf{D}}}$$

であるから

$$(x, y)=\frac{1}{k+\boxed{\mathbf{E}}}\left(\boxed{\mathbf{F}}, k\right)$$

を得る。よって，$x+2y=\boxed{\mathbf{G}}$ である。

(2)　PQ^2 を y を用いて表すと

$$\mathrm{PQ}^2=\boxed{\mathbf{H}}\,y^2-\boxed{\mathbf{I}}\,y+\boxed{\mathbf{J}}$$

となる。よって，PQ が最小となるのは $y=\dfrac{\boxed{\mathbf{K}}}{\boxed{\mathbf{L}}}$ のときであり，その値は

$\mathrm{PQ}=\dfrac{\boxed{\mathbf{M}}\sqrt{\boxed{\mathbf{N}}}}{\boxed{\mathbf{O}}}$ である。このときの k の値は $k=\boxed{\mathbf{P}}$ である。

－計算欄 (memo)－

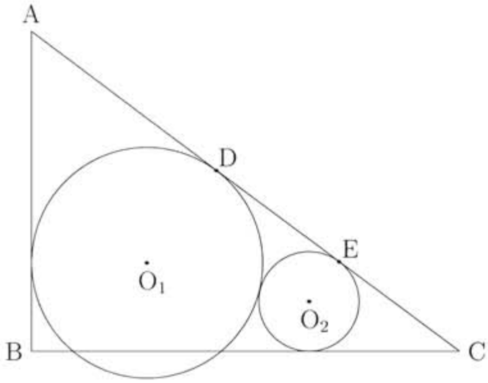
$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Q}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

右図のように

$AB=9,\quad BC=12,\quad \angle ABC=90^\circ$

を満たす三角形 ABC と，半径 $2r$ の円 O_1 と半径 r の円 O_2 がある。円 O_1 と円 O_2 は互いに外接し，円 O_1 は 2 辺 AB, AC と接し，円 O_2 は 2 辺 CA, CB に接している。このとき，r の値を求めよう。



まず，2 円 O_1, O_2 と辺 AC の接点をそれぞれ D, E とし，$\angle O_1AC=\alpha$ とする。このとき，$\tan 2\alpha=\dfrac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$ となるから，2 倍角の公式より，$\tan\alpha=\dfrac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}$ を得る。よって，$AD=\boxed{\text{E}}\,r$ である。

次に，$\angle O_2CA=\beta$ とすると，$\alpha+\beta=\boxed{\text{FG}}^\circ$ であるから，加法定理より，$\tan\beta=\dfrac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$ を得る。よって，$CE=\boxed{\text{J}}\,r$ である。

さらに，$AC=\boxed{\text{KL}}$，$DE=\boxed{\text{M}}\sqrt{\boxed{\text{N}}}\,r$ である。以上より

$$r=\frac{\boxed{\text{OP}}\left(\boxed{\text{Q}}-\boxed{\text{R}}\sqrt{\boxed{\text{S}}}\right)}{41}$$

を得る。

注）外接する：be circumscribed，
2 倍角の公式：the double-angle formula，加法定理：the addition theorem

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{T}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　$f(x) = 4\sqrt{3}e^{-x}\cos x + 6e^{-x}$ とする。

(1)　$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で，$f(x) = 0$ となる x の値を a, b $(a < b)$ とすると

$$a = \frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}\pi, \qquad b = \frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}\pi$$

である。

(2)　$\dfrac{d}{dx}\left(pe^{-x}\cos x + qe^{-x}\sin x\right) = e^{-x}\cos x$ を満たす定数 p, q の値はそれぞれ

$$p = \frac{\boxed{\mathsf{EF}}}{\boxed{\mathsf{G}}}, \qquad q = \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}$$

である。

(3)　(1) で求めた a, b の値に対して，$e^{-a} = A$，$e^{-b} = B$ とおいて，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値を計算すると

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\boxed{\mathsf{J}} - \sqrt{\boxed{\mathsf{K}}}\right)A - \left(\boxed{\mathsf{L}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{M}}}\right)B$$

となる。

\- 計算欄 (memo) -

問 2　定積分 $S=\int_0^a x\sqrt{\frac{1}{3}x+2}\,dx$ を考える。次の問いに答えなさい。

ただし，$\boxed{\text{S}}$，$\boxed{\text{T}}$ には下の ⓪ ～ ⑨ の中から適する式を選びなさい。

(1)　$t=\sqrt{\frac{1}{3}x+2}$ とおくと

$$\int x\sqrt{\frac{1}{3}x+2}\,dx = \boxed{\text{NO}}\int\left(t^{\boxed{\text{P}}}-\boxed{\text{Q}}\,t^{\boxed{\text{R}}}\right)dt$$
$$= \boxed{\text{S}}+C$$

となる。ただし，C は積分定数である。

(2)　(1) の結果を用いて

$$S=\boxed{\text{T}}$$

を得る。したがって

$$\lim_{a\to\infty}\frac{S}{a^{\frac{\boxed{\text{U}}}{\boxed{\text{V}}}}}=\frac{\boxed{\text{W}}\sqrt{\boxed{\text{X}}}}{\boxed{\text{YZ}}}$$

である。

⓪ $\frac{6}{5}t^5(3t^2-10)$

① $\frac{6}{5}t^3(3t^2-10)$

② $\frac{12}{5}t^5(3t^2-5)$

③ $\frac{12}{5}t^3(3t^2-5)$

④ $\frac{6}{5}t^3(3t^2-5)$

⑤ $\frac{6}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^5(a-4)+8\sqrt{2}\right\}$

⑥ $\frac{12}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^3(a-2)+4\sqrt{2}\right\}$

⑦ $\frac{12}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^5(a-2)+4\sqrt{2}\right\}$

⑧ $\frac{6}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^3(a-4)+8\sqrt{2}\right\}$

⑨ $\frac{6}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^3(a-2)+8\sqrt{2}\right\}$

注）積分定数：integral constant

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか,
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。