

数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～14ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に \boxed{A} , \boxed{BC} などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、 \boxed{A} , \boxed{BC} のように表しています。

解答に関する記入上の注意

- (1) 根号($\sqrt{\quad}$)の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例： $\sqrt{32}$ のときは、 $2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し、 $\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)
- (3) $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、下のようにマークしてください。
- (4) $\boxed{DE}x$ に $-x$ と答える場合は、Dを－、Eを1とし、下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	○	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	○	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	○	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*				
名前											

数学 コース 1

(基本コース)

(コース2は 15 ページからです)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース1」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1 2 次関数

$$f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 2a^2$$

の $0 \leq x \leq 2$ における最大値 M と最小値 m について考える。ただし、 a は $0 \leq a \leq 3$ を満たす定数とする。

(1) $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(a + \boxed{\text{A}}, a^2 - \boxed{\text{B}}a - \boxed{\text{C}} \right)$$

である。

(2) 次の文中の $\boxed{\text{D}}$ ~ $\boxed{\text{H}}$ には、下の選択肢 ① ~ ⑨の中から適するものを選びなさい。

最大値 M 、最小値 m を軸の位置に応じて求めると

$0 \leq a < \boxed{\text{D}}$ のとき

$$M = \boxed{\text{E}}, \quad m = \boxed{\text{F}}$$

$\boxed{\text{D}} \leq a \leq 3$ のとき

$$M = \boxed{\text{G}}, \quad m = \boxed{\text{H}}$$

である。

- | | | | |
|-------------------|------------------|----------|-------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 |
| ⑤ $a^2 - 2a$ | ⑥ $a^2 - 2a - 1$ | ⑦ $2a^2$ | |
| ⑧ $2a^2 - 2a - 1$ | ⑨ $2a^2 - 4a$ | | ⑩ $2a^2 - 6a + 3$ |

(3) m が最大となるのは $a = \boxed{\text{I}}$ のときであり、このときの m の値は $\boxed{\text{J}}$ である。
また、 m が最小となるのは $a = \boxed{\text{K}}$ のときであり、このときの m の値は $\boxed{\text{LM}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

数学-4

問 2 1 個のさいころを 3 回投げて、1 回目、2 回目、3 回目に出る目の数をそれぞれ a, b, c とする。この a, b, c を用いて、2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える。

(1) $b = 4$ かつ 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率は $\frac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{OPQ}}}$ である。

(2) $f(10) > 453$ となる確率を求めよう。

$f(10) > 453$ となる (a, b, c) の場合の数を求めると、次のようになる。

$a = 4$ かつ $b = 5$ のとき、 $\boxed{\text{R}}$ 通り

$a = 4$ かつ $b = 6$ のとき、 $\boxed{\text{S}}$ 通り

$a = 5$ のとき、 $\boxed{\text{TU}}$ 通り

$a = 6$ のとき、 $\boxed{\text{VW}}$ 通り

よって、求める確率は $\frac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}}}$ である。

注) さいころ : dice

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わります。I の解答欄 Z はマークしないでください。

II

問 1 $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ とする。

(1) $x = \boxed{\text{A}} + \sqrt{\boxed{\text{B}}}$, $y = \boxed{\text{C}} - \sqrt{\boxed{\text{D}}}$ である。したがって

$$x + y = \boxed{\text{E}}, \quad xy = \boxed{\text{F}}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \boxed{\text{GH}}$$

である。

また

$$5(x^2 - 4x) + 3(y^2 - 4y + 1) = \boxed{\text{IJ}}$$

となる。

(2) $\frac{m}{x} + \frac{n}{y} = 4 + 4\sqrt{3}$ となる整数 m, n の値は

$$m = \boxed{\text{KL}}, \quad n = \boxed{\text{M}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

数学一8

問 2 3つの2次関数

$$f(x) = -x^2 - 2x + 1, \quad g(x) = -x^2 + 4x, \quad h(x) = 2x^2 + ax + b$$

を考える。

(1) 2次方程式 $h(x) - f(x) = 0$ の判別式を D_1 , $h(x) - g(x) = 0$ の判別式を D_2 とすると

$$D_1 = \boxed{\text{N}}, \quad D_2 = \boxed{\text{O}}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{N}}$, $\boxed{\text{O}}$ には、次の選択肢 ①～⑤の中から適するものを選びなさい。

- ① $a^2 + 4a - 3b + 7$ ② $a^2 - 8a - 12b + 16$ ③ $a^2 + 4a - 12b + 16$
 ④ $a^2 + 8a + 12b + 16$ ⑤ $a^2 - 4a + 12b + 16$ ⑥ $a^2 - 8a - 3b + 7$

(2) 2つの方程式 $f(x) = h(x)$, $g(x) = h(x)$ の両方がただ1つの解をもつような a, b は

$$a = \boxed{\text{P}}, \quad b = \frac{\boxed{\text{Q}}}{\boxed{\text{R}}}$$

である。また、そのときの $f(x) = h(x)$ の解は $x = -\frac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}$ であり、 $g(x) = h(x)$ の

解は $x = \frac{\boxed{\text{U}}}{\boxed{\text{V}}}$ である。

(3) $b = 3$ とする。このとき、すべての x に対して、 $f(x) < h(x)$ かつ $g(x) < h(x)$ が成り立つような a の値の範囲は $\boxed{\text{W}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{W}}$ には、次の選択肢 ①～⑤の中から適するものを選びなさい。

- ① $-2 - 2\sqrt{6} < a < 10$ ② $a < -2 - 2\sqrt{6}, 10 < a$
 ③ $a < -1 - \sqrt{6}, 10 < a$ ④ $-2 < a < -1 + \sqrt{6}$
 ⑤ $-2 < a < -2 + 2\sqrt{6}$ ⑥ $-1 - \sqrt{6} < a < 10$

注) 判別式: discriminant

- 計算欄 (memo) -

II の問題はこれで終わりです。II の解答欄 X ~ Z はマークしないでください。

III

次の問いに答えなさい。

- (1) 1400 を素因数分解すると

$$1400 = \boxed{A}^{\boxed{B}} \times \boxed{C}^{\boxed{D}} \times \boxed{E}$$

である。ただし、 $\boxed{A} < \boxed{C}$ となるように答えなさい。

- (2) 1400 の約数の個数は \boxed{FG} である。

- (3) a, b は 1400 の約数で、 $1 < a < b$ とする。このとき、 a と b が互いに素であって、 $ab = 1400$ となるような a, b の組 (a, b) は \boxed{H} 組ある。その中で、 $b - a$ が最も大きくなるような a, b は

$$a = \boxed{I}, \quad b = \boxed{JKL}$$

である。

- (4) $a = \boxed{I}, b = \boxed{JKL}$ のとき方程式

$$bx - ay = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を考える。① を変形して

$$y = \boxed{MN}x + \frac{\boxed{O}x - \boxed{P}}{\boxed{Q}}$$

を得る。したがって、方程式 ① を満たす正の整数 x, y の組の中で x が最小のものは

$$x = \boxed{R}, \quad y = \boxed{ST}$$

である。

注) 素因数分解 : factorization into prime number, 約数 : divisor,
互いに素 : relatively prime

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 U ～ Z はマークしないでください。

IV

1 辺の長さが $\sqrt{2}$ であるひし形 ABCD において、 $\angle ABC = 30^\circ$ とする。

(1) $AC^2 = \boxed{A} - \boxed{B} \sqrt{\boxed{C}}$, $BD^2 = \boxed{D} + \boxed{E} \sqrt{\boxed{F}}$ である。

一般に、正数 a, b に対して

$$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm 2\sqrt{ab} \quad (\text{複号同順})$$

が成り立つ。この結果を用いると

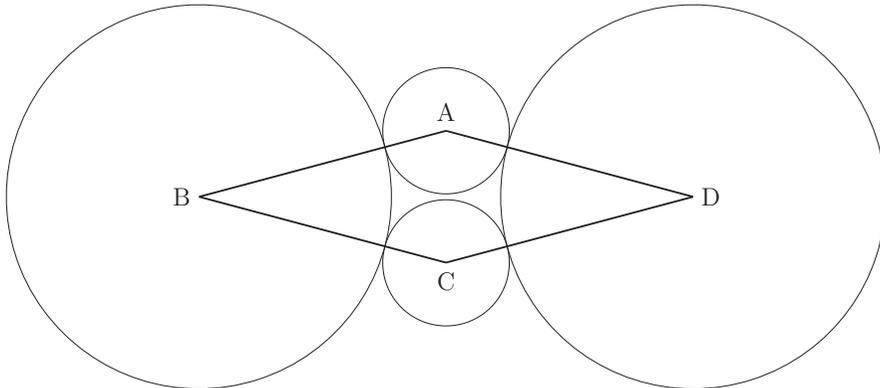
$$AC = \sqrt{\boxed{G}} - \boxed{H}, \quad BD = \sqrt{\boxed{I}} + \boxed{J}$$

である。

(IV) は次ページに続く)

注) ひし形 : rhombus

- (2) ひし形 ABCD の各頂点を中心として 4 つの円を描く。頂点 A, C を中心とする円の半径を r , 頂点 B, D を中心とする円の半径を $\sqrt{2} - r$ とし, 向かい合う頂点 (A と C, B と D) を中心とする円同士は, 接しても良いが, 交わらないものとする。



このとき, ひし形 ABCD と 4 つの円との共通部分の面積を S とすると

$$S = \pi \left(r^2 - \frac{\sqrt{\boxed{K}}}{\boxed{L}} r + \frac{\boxed{M}}{\boxed{N}} \right)$$

である。ただし, r の範囲は

$$\sqrt{\boxed{O}} - \frac{\sqrt{\boxed{P} + \boxed{Q}}}{\boxed{R}} \leq r \leq \frac{\sqrt{\boxed{S}} - \boxed{T}}{\boxed{U}}$$

である。

したがって, S は $r = \frac{\sqrt{\boxed{V}}}{\boxed{W}}$ のとき最小となり, その値は $\frac{\boxed{X}}{\boxed{YZ}} \pi$ である。

- 計算欄 (memo) -

Ⅳ の問題はこれで終わりです。

コース1の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の Ⅴ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース1」が正しくマークしてあるか、
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px; display: inline-block;"> コース 2 Course 2 </div>
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1 2 次関数

$$f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 2a^2$$

の $0 \leq x \leq 2$ における最大値 M と最小値 m について考える。ただし、 a は $0 \leq a \leq 3$ を満たす定数とする。

(1) $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(a + \boxed{\text{A}}, a^2 - \boxed{\text{B}}a - \boxed{\text{C}} \right)$$

である。

(2) 次の文中の $\boxed{\text{D}} \sim \boxed{\text{H}}$ には、下の選択肢 ① ~ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

最大値 M 、最小値 m を軸の位置に応じて求めると

$0 \leq a < \boxed{\text{D}}$ のとき

$$M = \boxed{\text{E}}, \quad m = \boxed{\text{F}}$$

$\boxed{\text{D}} \leq a \leq 3$ のとき

$$M = \boxed{\text{G}}, \quad m = \boxed{\text{H}}$$

である。

- | | | | |
|-------------------|------------------|----------|-------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 |
| ⑤ $a^2 - 2a$ | ⑥ $a^2 - 2a - 1$ | ⑦ $2a^2$ | |
| ⑧ $2a^2 - 2a - 1$ | ⑨ $2a^2 - 4a$ | | ⑩ $2a^2 - 6a + 3$ |

(3) m が最大となるのは $a = \boxed{\text{I}}$ のときであり、このときの m の値は $\boxed{\text{J}}$ である。
 また、 m が最小となるのは $a = \boxed{\text{K}}$ のときであり、このときの m の値は $\boxed{\text{LM}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

数学-18

問 2 1 個のさいころを 3 回投げて、1 回目、2 回目、3 回目に出る目の数をそれぞれ a, b, c とする。この a, b, c を用いて、2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える。

(1) $b = 4$ かつ 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率は $\frac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{OPQ}}}$ である。

(2) $f(10) > 453$ となる確率を求めよう。

$f(10) > 453$ となる (a, b, c) の場合の数を求めると、次のようになる。

$a = 4$ かつ $b = 5$ のとき、 $\boxed{\text{R}}$ 通り

$a = 4$ かつ $b = 6$ のとき、 $\boxed{\text{S}}$ 通り

$a = 5$ のとき、 $\boxed{\text{TU}}$ 通り

$a = 6$ のとき、 $\boxed{\text{VW}}$ 通り

よって、求める確率は $\frac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}}}$ である。

注) さいころ : dice

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わります。I の解答欄 Z はマークしないでください。

II

問 1 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \frac{2}{9}, \quad a_n = \frac{(n+1)(2n-3)}{3n(2n+1)} a_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

で与えられている。このとき、一般項 a_n と無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよう。

(1) 次の文中の **A** ~ **E** には、下の選択肢 ① ~ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

まず、 $b_n = \frac{n+1}{3^n a_n}$ とおき、 $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ を n の式で表すと

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}$$

となる。この式より

$$a_n = \frac{n+1}{3^n (\mathbf{E})(2n+1)}$$

である。

- ① $n-1$ ② n ③ $n+1$ ④ $2n-1$ ⑤ $2n+1$
 ⑥ $2n-3$ ⑦ $2n+3$ ⑧ $3n-1$ ⑨ $3n$ ⑩ $3n+1$

(2) 次に、 $c_n = \frac{1}{3^n(2n+1)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおく。このとき、 $a_n = Ac_{n-1} + Bc_n$ とおく

と、 $A = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{G}}$ 、 $B = \frac{\mathbf{HI}}{\mathbf{J}}$ である。この式を用いて、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ を求めると

$$S_n = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{L}} (\mathbf{M} - c_n)$$

となる。したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{O}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

数学-22

問 2 x 軸上の点 $(5, 0)$ を中心とする半径 4 の円 C を考える。

(1) 円 C 上に点 $P(p, q)$ をとると

$$p^2 - \boxed{\text{PQ}}p + q^2 + \boxed{\text{R}} = 0$$

が成り立つ。また、点 $P(p, q)$ における円 C の接線の方程式は

$$(p - \boxed{\text{S}})x + qy = \boxed{\text{T}}p - \boxed{\text{U}}$$

である。

(2) $a \geq 0$ とし、 y 軸上の点 $A(0, a)$ から円 C に接線を引き、その接点を $P(p, q)$ とおく。

線分 AP の長さが最小となるのは、 $a = \boxed{\text{V}}$ のときであり、その長さは $\boxed{\text{W}}$ である。

また、点 A から円 C に引いた 2 本の接線が直交するのは、線分 AP の長さが $\boxed{\text{X}}$ のときであり、このときの a の値は $a = \sqrt{\boxed{\text{Y}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

II の問題はこれで終わりです。II の解答欄 Z はマークしないでください。

III

x の関数

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 - 3(2a + 1)x + a + 2$$

について、次の問いに答えなさい。

- (1) 次の文中の **G** ~ **K** には、下の選択肢 ① ~ ⑤ の中から適するものを選びなさい。また、他の には、適する数を入れなさい。

$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \text{A} (x - \text{B}a - \text{C}) (x + \text{D})$$

であるから

- (i) $a > \text{EF}$ のとき、 $f(x)$ は $x = -\text{D}$ で **G** となり、
 $x = \text{B}a + \text{C}$ で **H** となる。
- (ii) $a = \text{EF}$ のとき、 $f(x)$ はつねに **I** となる。
- (iii) $a < \text{EF}$ のとき、 $f(x)$ は $x = -\text{D}$ で **J** となり、
 $x = \text{B}a + \text{C}$ で **K** となる。

- ① 極大 ② 極小 ③ 増加 ④ 減少
 ⑤ 最大 ⑥ 最小

(III) は次ページに続く)

注) 導関数 : derivative

(2) $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値 m を a を用いて表そう。

(i) $a \geq \boxed{\text{L}}$ のとき, $m = \boxed{\text{MN}} a$ である。

(ii) $\boxed{\text{OP}} \leq a < \boxed{\text{L}}$ のとき, $m = \boxed{\text{QR}} (a^3 + \boxed{\text{S}} a^2 + \boxed{\text{T}} a)$ である。

(iii) $a < \boxed{\text{OP}}$ のとき, $m = \boxed{\text{U}} a + \boxed{\text{V}}$ である。

(3) (2) の m の値が最も大きくなるのは $a = \frac{-\boxed{\text{W}} + \sqrt{\boxed{\text{X}}}}{\boxed{\text{Y}}}$ のときである。

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。 $\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

2つの関数

$$y = x \log ax \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = 2x - 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を考える。ただし、 $a > 0$ とする。また、 \log は自然対数を表す。

(1) ① のグラフが ② のグラフに接するような a を求めよう。

点 $(t, t \log at)$ における ① のグラフの接線の方程式は A である。ただし、A には、次の選択肢 ① ~ ③ の中から適するものを選びなさい。

$$\textcircled{0} \quad y = (\log at + 1)x - t \qquad \textcircled{1} \quad y = (\log at + a)x - t$$

$$\textcircled{2} \quad y = (a \log t + 1)x + t \qquad \textcircled{3} \quad y = (a \log t + a)x + t$$

したがって、① のグラフが ② のグラフに接するのは $a = \frac{e}{\text{B}}$ のときで、その

接点の座標は (C, D) である。

(2) $a = \frac{e}{\text{B}}$ のとき、関数 ① は $x = \text{E} e^{-\text{F}}$ で最小値 $-\text{G} e^{-\text{H}}$ をとる。

(IV は次ページに続く)

注) 自然対数 : natural logarithm

- (3) $a = \frac{e}{\text{B}}$ のとき、① のグラフと ② のグラフおよび x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよう。

次の不定積分を求めると

$$\int x \log ax \, dx = \text{I} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。ただし、 I には、次の選択肢 ① ~ ③ の中から適するものを選びなさい。

- ① $\frac{1}{2} x^2 \log ax - \frac{1}{2} x^2$ ④ $2x^2 \log ax - 2x^2$
 ② $\frac{1}{2} x^2 \log ax - \frac{1}{4} x^2$ ⑤ $2x^2 \log ax - 4x^2$

したがって

$$S = \frac{\text{J}}{\text{K}} e^{-\text{L}}$$

である。

注) 不定積分 : indefinite integral

IV の問題はこれで終わりです。 IV の解答欄 M ~ Z はマークしないでください。

コース2の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の V はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース2」が正しくマークしてあるか、
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

