

# 数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

## I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

## II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

## III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に  $\boxed{A}$ ,  $\boxed{BC}$  などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、 $\boxed{A}$ ,  $\boxed{BC}$  のように表しています。

### 解答に関する記入上の注意

- (1) 根号( $\sqrt{\quad}$ )の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。  
(例： $\sqrt{32}$ のときは、 $2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ 、 $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

- (3)  $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、下のようにマークしてください。
- (4)  $\boxed{DE}x$ に $-x$ と答える場合は、Dを－、Eを1とし、下のようにマークしてください。

### 【解答用紙】

A	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	<input type="radio"/>	0	1	2	<input checked="" type="radio"/>	4	5	6	7	8	9
C	<input type="radio"/>	0	1	2	3	<input checked="" type="radio"/>	5	6	7	8	9
D	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	<input type="radio"/>	0	<input checked="" type="radio"/>	2	3	4	5	6	7	8	9

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*					
名前												



# 数学 コース 1

(基本コース)

(コース2は 15 ページからです)

## 「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース1」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

数学-2

I

問 1  $x$  の 2 次関数  $f(x) = 2x^2 + ax - 1$  は

$$f(-1) \geq -3, \quad f(2) \geq 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たしている。このとき、 $f(x)$  の最小値  $m$  を考える。

(1)  $m$  は  $a$  を用いて

$$m = -\frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}} a^2 - \boxed{\text{C}}$$

と表される。

(2)  $f(x)$  が条件 ① を満たすような  $a$  の値の範囲は

$$\boxed{\text{DE}} \leq a \leq \boxed{\text{F}}$$

である。

(3)  $m$  の値が最も大きくなるのは、 $y = f(x)$  のグラフの軸が直線  $x = \boxed{\text{G}}$  のときである。また、そのときの  $m$  の値は  $\boxed{\text{HI}}$  である。

(4)  $m$  の値が最も小さくなるのは、 $y = f(x)$  のグラフの軸が直線  $x = \boxed{\text{JK}}$  のときである。また、そのときの  $m$  の値は  $\boxed{\text{LM}}$  である。

- 計算欄 (memo) -

## 数学-4

問 2 平面上に三角形 ABC があって、1 個の球が頂点 A に置かれている。いま、1 個のサイコロを投げ、次の規則にしたがって球を動かす。

- (i) 球が A にあるとき、出た目が 1 であれば B に動かし、その他の場合は A から動かさない。
- (ii) 球が B にあるとき、出た目が 4 以下であれば C に動かし、その他の場合は B から動かさない。  
ただし、球が C に到達すれば試行を止める。

このとき、サイコロを投げて、4 回以内に球が C に到達する確率を求めよう。

(1) サイコロを投げて 2 回目に球が C に到達する確率は  $\frac{1}{\boxed{N}}$  である。

(2) サイコロを投げて 3 回目に球が C に到達する確率は  $\frac{\boxed{O}}{\boxed{PQ}}$  である。

(3) サイコロを投げて 4 回目に球が C に到達する確率は  $\frac{\boxed{RS}}{\boxed{TUV}}$  である。

以上から、4 回以内に球が C に到達する確率は  $\frac{\boxed{WX}}{\boxed{YZ}}$  である。

---

注) サイコロ : dice, 試行 : trial

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わります。

II

問 1  $a, b$  は有理数,  $p$  は実数とする。  $x = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+2}$  を解にもつ 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

と不等式

$$x + 1 < 2x + p + 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を考える。

(1)  $a, b$  を求めよう。  $x = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+2}$  の分母を有理化して,  $x = \sqrt{\text{A}} - \text{B}$  を得る。

これが方程式 ① の解であるから, これを ① に代入して

$$-a + b + \text{C} + (a - \text{D})\sqrt{\text{E}} = 0$$

を得る。したがって

$$a = \text{F}, \quad b = \text{GH}$$

である。

(2) 方程式 ① の 2 つの解が, どちらも不等式 ② を満たすような最小の整数  $p$  を求めよう。

不等式 ② を解いて

$$x > -p - \text{I}$$

を得る。方程式 ① の 2 つの解が, どちらもこれを満たすので

$$p > \sqrt{\text{J}} - \text{K}$$

である。したがって, 最小の整数  $p$  は  $\text{L}$  である。

---

注) 有理数 : rational number



- 計算欄 (memo) -

## 数学一8

### 問 2 2次関数

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4$$

を考える。

$a, b$  は  $0 < a < b$  と  $2 < b$  を満たす実数とする。このとき、関数  $y = f(x)$  の  $a \leq x \leq b$  における値域が  $a \leq y \leq b$  となるような  $a, b$  の値を求めよう。

$y = f(x)$  のグラフの軸の方程式が  $x = \boxed{\text{M}}$  であるから、次のように場合分けをする。

(i)  $\boxed{\text{M}} \leq a$

(ii)  $0 < a < \boxed{\text{M}}$

(i) のとき、 $f(x)$  の値は  $a \leq x \leq b$  において、 $x$  とともに増加するから、 $f(a) = a$ 、 $f(b) = b$  となればよい。これらを解いて、 $a = \frac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{O}}}$ 、 $b = \boxed{\text{P}}$  を得るが、この  $a$  は (i) を満たさない。

(ii) のとき、 $f(x)$  の  $a \leq x \leq b$  における最小値は  $\boxed{\text{Q}}$  であるから

$$a = \boxed{\text{R}}$$

である。これは、(ii) を満たす。

このとき、 $f(a) = \frac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}} < b$  より、 $f(b) = b$  である。よって

$$b = \boxed{\text{U}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

II の問題はこれで終わりです。II の解答欄 V ~ Z はマークしないでください。

III

$1 < a < b < c < d$  を満たす 4 つの自然数  $a, b, c, d$  を考える。これらの数から得られる 2 つの集合  $A = \{a, b, c, d\}$  と  $B = \{a^2, b^2, c^2, d^2\}$  が次の 2 条件を満たすとする。

- (i) 共通部分  $A \cap B$  に属する要素は 2 個あり、その和は 15 以上 25 以下である。
- (ii) 和集合  $A \cup B$  に属するすべての要素の和は 300 以下である。

このとき、 $a, b, c, d$  の値を求めよう。

まず、 $A \cap B = \{x, y\}$  とおく。ただし、 $x < y$  とする。 $x \in B$  かつ  $y \in B$  であるから、(i) より  $y = \boxed{\text{AB}}$  であり、 $x$  は  $\boxed{\text{C}}$ 、 $\boxed{\text{D}}$  のどちらかである。ただし、 $\boxed{\text{C}} < \boxed{\text{D}}$  となるように答えなさい。ここで、(ii) を考慮すると、 $x = \boxed{\text{E}}$  である。したがって、 $A$  は  $\boxed{\text{F}}$ 、 $\boxed{\text{F}}^2$ 、 $\boxed{\text{F}}^4$  を含む。

さらに、 $A$  に属する残りの要素を  $z$  とすると、 $z$  は (ii) より

$$z^2 + z \leq \boxed{\text{GH}}$$

を満たす。よって、 $z = \boxed{\text{I}}$  である。

以上より

$$a = \boxed{\text{J}}, \quad b = \boxed{\text{K}}, \quad c = \boxed{\text{L}}, \quad d = \boxed{\text{MN}}$$

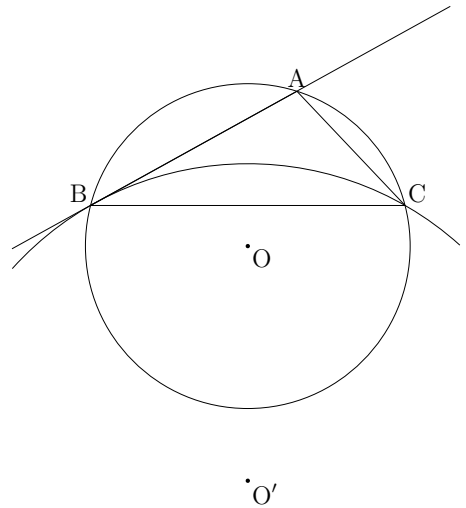
である。

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 O ～ Z はマークしないでください。

IV

三角形 ABC の 3 辺の長さを  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ ,  $CA = 4$  とする。2 点 B, C を通り、直線 AB に接する円の中心を  $O'$  とし、三角形 ABC の外接円の中心を  $O$  とする。このとき、線分  $OO'$  の長さを求めよう。



(1)  $\cos \angle ABC = \frac{\boxed{A}}{\boxed{B}}$ ,  $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{\boxed{CD}}}{\boxed{E}}$  である。

(2) 三角形 ABC の外接円の半径は  $\frac{\boxed{FG} \sqrt{\boxed{HI}}}{\boxed{JK}}$  である。

(3) 直線  $OO'$  と辺  $BC$  との交点を  $D$  とすると

$$OD = \frac{\boxed{L} \sqrt{\boxed{MN}}}{\boxed{OP}}, \quad O'D = \frac{\boxed{QR} \sqrt{\boxed{ST}}}{\boxed{UV}}$$

である。したがって、 $OO' = \frac{\boxed{W} \sqrt{\boxed{XY}}}{\boxed{Z}}$  である。

注) 外接円 : circumscribed circle

- 計算欄 (memo) -

Ⅳ の問題はこれで終わりです。

コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の Ⅴ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか、  
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。





# 数学 コース 2

(上級コース)

## 「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px; display: inline-block;">                     コース 2 Course 2                 </div>
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1  $x$  の 2 次関数  $f(x) = 2x^2 + ax - 1$  は

$$f(-1) \geq -3, \quad f(2) \geq 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たしている。このとき、 $f(x)$  の最小値  $m$  を考える。

(1)  $m$  は  $a$  を用いて

$$m = -\frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}} a^2 - \boxed{\text{C}}$$

と表される。

(2)  $f(x)$  が条件 ① を満たすような  $a$  の値の範囲は

$$\boxed{\text{DE}} \leq a \leq \boxed{\text{F}}$$

である。

(3)  $m$  の値が最も大きくなるのは、 $y = f(x)$  のグラフの軸が直線  $x = \boxed{\text{G}}$  のときである。また、そのときの  $m$  の値は  $\boxed{\text{HI}}$  である。

(4)  $m$  の値が最も小さくなるのは、 $y = f(x)$  のグラフの軸が直線  $x = \boxed{\text{JK}}$  のときである。また、そのときの  $m$  の値は  $\boxed{\text{LM}}$  である。

- 計算欄 (memo) -

## 数学－18

問 2 平面上に三角形 ABC があって、1 個の球が頂点 A に置かれている。いま、1 個のサイコロを投げ、次の規則にしたがって球を動かす。

- (i) 球が A にあるとき、出た目が 1 であれば B に動かし、その他の場合は A から動かさない。
- (ii) 球が B にあるとき、出た目が 4 以下であれば C に動かし、その他の場合は B から動かさない。
- ただし、球が C に到達すれば試行を止める。

このとき、サイコロを投げて、4 回以内に球が C に到達する確率を求めよう。

(1) サイコロを投げて 2 回目に球が C に到達する確率は  $\frac{1}{\boxed{N}}$  である。

(2) サイコロを投げて 3 回目に球が C に到達する確率は  $\frac{\boxed{O}}{\boxed{PQ}}$  である。

(3) サイコロを投げて 4 回目に球が C に到達する確率は  $\frac{\boxed{RS}}{\boxed{TUV}}$  である。

以上から、4 回以内に球が C に到達する確率は  $\frac{\boxed{WX}}{\boxed{YZ}}$  である。

---

注) サイコロ : dice, 試行 : trial

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わります。

II

問 1 漸化式

$$a_1 = 18, \quad a_{n+1} - 12a_n + 3^{n+2} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定まる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよう。

数列  $\{b_n\}$  を

$$b_n = \frac{a_n}{\boxed{\text{A}}^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めると,  $\{b_n\}$  は

$$b_1 = \boxed{\text{B}}, \quad b_{n+1} - \boxed{\text{C}} b_n + \boxed{\text{D}} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす。この漸化式は

$$b_{n+1} - \boxed{\text{E}} = \boxed{\text{F}} (b_n - \boxed{\text{E}})$$

と変形できる。ここで, 数列  $\{c_n\}$  を

$$c_n = b_n - \boxed{\text{E}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めると,  $\{c_n\}$  は初項  $\boxed{\text{G}}$ , 公比  $\boxed{\text{H}}$  の等比数列である。

したがって

$$a_n = \boxed{\text{I}}^n \left( \boxed{\text{J}} \cdot \boxed{\text{K}}^{n-1} + \boxed{\text{L}} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。

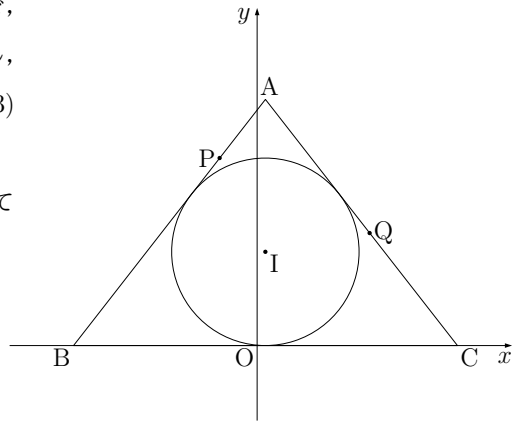
---

注) 漸化式 : recurrence formula, 公比 : common ratio, 等比数列 : geometric progression

- 計算欄 (memo) -

数学-22

問2 右図のような、原点を  $O$  とする  $xy$  平面上で、  
 $AB = AC$  の二等辺三角形  $ABC$  を考える。ただし、  
 辺  $AB$  は点  $P(-1, 5)$  を通り、辺  $AC$  は点  $Q(3, 3)$   
 を通るものとする。



このとき、三角形  $ABC$  の内接円の半径について  
 考えよう。

2点  $A, B$  を通る直線を  $l_1$  とし、2点  $A, C$  を通る直線を  $l_2$  とする。 $l_1$  の傾きを  $a$  とする  
 と、 $l_1, l_2$  の方程式は

$$l_1: y = ax + a + \boxed{\text{M}}$$

$$l_2: y = -ax + \boxed{\text{N}}a + \boxed{\text{O}}$$

である。

また、内接円の中心を  $I$  とおき、半径を  $r$  とおくと、 $I$  の座標は  $\left( \boxed{\text{P}} - \frac{\boxed{\text{Q}}}{a}, r \right)$   
 である。

したがって、 $r$  は  $a$  を用いて

$$r = \frac{\boxed{\text{R}}a + \boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}} + \sqrt{a^2 + \boxed{\text{U}}}}$$

と表される。

特に、 $r = \frac{5}{2}$  のとき、頂点  $A$  の座標は  $\left( \frac{\boxed{\text{V}}}{\boxed{\text{W}}}, \frac{\boxed{\text{XY}}}{\boxed{\text{Z}}} \right)$  である。

注) 内接円 : inscribed circle



- 計算欄 (memo) -

II の問題はこれで終わりです。

III

すべての正の実数  $x$  に対して、不等式

$$\frac{\log 3x}{4x+1} \leq \log \left( \frac{2kx}{4x+1} \right) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つような正の実数  $k$  の値の範囲を求めよう。ただし、 $\log$  は自然対数とする。

- (1) 次の文中の **A** , **B** には、下の選択肢 ① ~ ⑧ の中から適するものを選びなさい。

不等式 ① を変形して

$$\log k \geq \mathbf{A} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を得る。

ここで、② の右辺を  $g(x)$  とおき、 $g(x)$  を  $x$  で微分すると

$$g'(x) = \mathbf{B}$$

である。

- |  |   |
|--|---|
| <p>② <math>\frac{\log 3x}{4x+1} - \log(4x+1) - \log 2x</math></p> <p>④ <math>\frac{\log 3x}{4x+1} + \log(4x+1) + \log 2x</math></p> <p>⑥ <math>\frac{4 \log 3x}{(4x+1)^2}</math></p> <p>⑧ <math>-\frac{4 \log 3x}{(4x+1)^2}</math></p> <p>① <math>-\frac{3 \log 2x}{(4x+1)^2}</math></p> | <p>① <math>\frac{\log 3x}{4x+1} - \log(4x+1) + \log 2x</math></p> <p>③ <math>\frac{\log 3x}{4x+1} + \log(4x+1) - \log 2x</math></p> <p>⑤ <math>\frac{3x+2+\log 3x}{(4x+1)^2}</math></p> <p>⑦ <math>\frac{3x-2-\log 2x}{(4x+1)^2}</math></p> |
|--|---|

(III)は次ページに続く)

---

注) 自然対数 : natural logarithm

(2) 次の文中の  $\boxed{\text{E}}$  ,  $\boxed{\text{F}}$  ,  $\boxed{\text{G}}$  には, 下の選択肢 ① ~ ③ の中から適するものを選び, 他の  $\boxed{\quad}$  には適する数を入れなさい。

$g(x)$  は区間  $0 < x < \frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}$  で  $\boxed{\text{E}}$  し, また, 区間  $\frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}} < x$  で  $\boxed{\text{F}}$  する。よって,  $g(x)$  は  $x = \frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}$  で  $\boxed{\text{G}}$  になる。

したがって, すべての正の実数  $x$  に対して不等式 ① が成り立つような  $k$  の値の範囲は

$$k \geq \frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$$

である。

- ① 増加      ② 減少      ③ 最大      ④ 最小

$\boxed{\text{III}}$  の問題はこれで終わりです。  $\boxed{\text{III}}$  の解答欄  $\boxed{\text{J}}$  ~  $\boxed{\text{Z}}$  はマークしないでください。

IV

次の2つの曲線を考える。

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$4xy = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

ただし、 $x > 0$ 、 $y > 0$  とする。このとき、曲線 ① と曲線 ② で囲まれる部分の面積  $S$  を求めよう。

- (1) まず、曲線 ① と曲線 ② の交点を P, Q、それらの  $x$  座標をそれぞれ  $p, q$  ( $p < q$ ) とする。

曲線 ① と曲線 ② の交点の座標  $(x, y)$  は、① より、 $x = \cos \theta$ 、 $y = \sin \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とおける。このとき、② より

$$\sin \boxed{\text{A}} \theta = \frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}}$$

となる。これより

$$\theta = \frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{EF}}} \pi, \quad \frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{HI}}} \pi$$

となる。ただし、 $\frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{EF}}} < \frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{HI}}}$  となるように答えなさい。

よって

$$p = \cos \frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{KL}}} \pi, \quad q = \cos \frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{NO}}} \pi$$

を得る。

(IV) は次ページに続く)

(2)  $S$  の値を求めよう。

$$S = \int_p^q \left( \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4x} \right) dx$$

であるから

$$I = \int_p^q \sqrt{1-x^2} dx, \quad J = \int_p^q \frac{1}{x} dx$$

の値を求めればよい。

$I$  については、 $x = \cos \theta$  とおいて置換積分の計算をすると

$$I = \frac{\boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{Q}}} \pi$$

となる。また

$$J = \log \left( \boxed{\text{R}} + \sqrt{\boxed{\text{S}}} \right)$$

である。ただし、 $\log$  は自然対数である。

以上より

$$S = \frac{\boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{Q}}} \pi - \frac{\boxed{\text{T}}}{\boxed{\text{U}}} \log \left( \boxed{\text{R}} + \sqrt{\boxed{\text{S}}} \right)$$

となる。

注) 置換積分 : integration by substitution, 自然対数 : natural logarithm

$\boxed{\text{IV}}$  の問題はこれで終わりです。 $\boxed{\text{IV}}$  の解答欄  $\boxed{\text{V}} \sim \boxed{\text{Z}}$  はマークしないでください。

コース2の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の  $\boxed{\text{V}}$  はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース2」が正しくマークしてあるか、  
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

