

# 数 学 (80分)

【コース1 (基本, Basic) ・コース2 (上級, Advanced)】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

## I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

## II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

## III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。適するものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に  $\boxed{A}$ ,  $\boxed{BC}$  などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、 $\boxed{A}$ ,  $\boxed{BC}$  のように表しています。

### 解答に関する記入上の注意

- (1) 根号( $\sqrt{\quad}$ )の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。  
(例： $\sqrt{32}$  のときは、 $2\sqrt{8}$  ではなく  $4\sqrt{2}$  と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。  
(例： $\frac{2}{6}$  は  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{2}{\sqrt{6}}$  は  $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$  と分母を有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$  と答えます。)
- (3)  $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$  に  $\frac{-\sqrt{3}}{4}$  と答える場合は、下のようにマークしてください。
- (4)  $\boxed{DE}x$  に  $-x$  と答える場合は、Dを－、Eを1とし、下のようにマークしてください。

### 【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	○	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	○	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	○	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*				
名前											



# 数学 コース 1

(基本コース)

(コース2は 15 ページからです)

## 「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース1」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

数学-2

I

問 1 2つの2次関数

$$f(x) = -2x^2, \quad g(x) = x^2 + ax + b$$

を考える。関数  $g(x)$  は次の2つの条件を満たしている。

(i)  $g(x)$  の値は  $x = 3$  で最小になる。

(ii)  $g(4) = f(4)$

(1) 条件 (i) より  $a = -\boxed{\text{A}}$  である。さらに、条件 (ii) より  $b = -\boxed{\text{BC}}$  を得る。したがって、関数  $g(x)$  の最小値は  $-\boxed{\text{DE}}$  である。

(2)  $f(x) = g(x)$  を満たす  $x$  で4と異なるものを求めよう。 $x$  は

$$x^2 - \boxed{\text{F}}x - \boxed{\text{G}} = 0$$

を満たすから、 $x = -\boxed{\text{H}}$  である。

(3)  $-\boxed{\text{H}} \leq x \leq 4$  において、 $f(x) - g(x)$  の値は  $x = \boxed{\text{I}}$  のとき最大になり、その値は  $\boxed{\text{JK}}$  である。

- 計算欄 (memo) -

## 数学-4

問 2 A と B の 2 人はともに 3 枚のカードが入っている袋をもっている。袋の中の 3 枚のカードには、それぞれ 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれている。2 人が同時に自分の袋から 1 枚のカードを取り出し、書かれている数の大きさを勝負を競う。同じ数が書かれたカードを取り出したときは引き分けとし、カードの数が異なるときは大きい数のカードを取り出した方を勝ちとする。

(1) 1 回の勝負で引き分けになる確率は  $\frac{\boxed{L}}{\boxed{M}}$  である。

(2) 以下、この勝負を 4 回実行するとき、次の確率を求めよう。ただし、取り出したカードは毎回元の袋に戻すこととする。

(i) A が 3 勝以上する確率は  $\frac{\boxed{N}}{\boxed{O}}$  である。

(ii) A が 1 勝 1 敗 2 引き分けになる確率は  $\frac{\boxed{P}}{\boxed{QR}}$  である。

(iii) A の勝つ回数と B の勝つ回数が同じになる確率は  $\frac{\boxed{ST}}{\boxed{UV}}$  である。したがって、  
A の勝つ回数が B の勝つ回数より多くなる確率は  $\frac{\boxed{WX}}{\boxed{UV}}$  である。

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わります。 I の解答欄  Y ,  Z はマークしないでください。

II

問 1 以下の問いに答えよ。

(1) 次の 2 つの不等式

$$\frac{m}{3} < \sqrt{3} < \frac{n}{4}, \quad \frac{n}{3} < \sqrt{6} < \frac{m}{2}$$

を同時に満たす正の整数  $m, n$  の値は

$$m = \boxed{\text{A}}, \quad n = \boxed{\text{B}}$$

である。

(2) (1) の結果を用いて、次の 5 つの数 ①～⑤

$$\begin{array}{lll} \text{① } (\sqrt{(-3)(-4)})^3 & \text{② } 6\sqrt{(-2)^3(-3)} & \text{③ } \sqrt{\{(-4)(-3)^2\}^2} \\ \text{④ } (-1)^3\sqrt{\{(-2)^5\}^2} & \text{⑤ } \left(\frac{5\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 & \end{array}$$

の大小を比較したい。

⑤ の分母を有理化すると

$$\left(\frac{5\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 = \boxed{\text{CD}} + \boxed{\text{E}}\sqrt{\boxed{\text{F}}}$$

である。5 つの数のうち、35 より大きい数は  $\boxed{\text{G}}$  個あり、負の数は  $\boxed{\text{H}}$  個ある。

特に、5 つの数を小さい順に ①～⑤ の番号で並べると

$$\boxed{\text{I}} < \boxed{\text{J}} < \boxed{\text{K}} < \boxed{\text{L}} < \boxed{\text{M}}$$

となる。



- 計算欄 (memo) -

## 数学-8

問 2 関数  $f(x) = x^2 + ax + b$  は

(i)  $f(3) = 1$

(ii)  $13 \leq f(-1) \leq 25$

を満たしている。このとき、 $f(x)$  の最小値  $m$  を  $a$  の式で表そう。さらに、 $m$  の最大値と最小値を求めよう。

条件 (i) より、 $a, b$  は

$$\boxed{\text{N}} a + b + \boxed{\text{O}} = 0$$

を満たす。これより、 $f(x)$  は  $a$  を用いて

$$f(x) = x^2 + ax - \boxed{\text{P}} a - \boxed{\text{Q}}$$

と表される。よって、条件 (ii) より、 $a$  は

$$-\boxed{\text{R}} \leq a \leq -\boxed{\text{S}}$$

を満たす。

一方、 $m$  は  $a$  を用いて

$$m = -\frac{1}{\boxed{\text{T}}} \left( a + \boxed{\text{U}} \right)^2 + \boxed{\text{V}}$$

と表される。

したがって、 $m$  は  $a = -\boxed{\text{W}}$  のとき最大値  $\boxed{\text{X}}$  をとり、 $a = -\boxed{\text{Y}}$  のとき最小値  $\boxed{\text{Z}}$  をとる。

- 計算欄 (memo) -

II の問題はこれで終わります。

III

正の整数  $N$  を 5 進法と 9 進法で表すと、それぞれ 3 桁の数で数字の並ぶ順序が逆になる。  
 このような整数  $N$  を 10 進法と 4 進法で表そう。

$N$  を 5 進法で表すと  $abc$ , 9 進法で表すと  $cba$  であるとする。このとき

$$\boxed{A} \leq a \leq \boxed{B}, \quad \boxed{C} \leq b \leq \boxed{D}, \quad \boxed{E} \leq c \leq \boxed{F} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。また

$$N = \boxed{GH}a + \boxed{I}b + c = \boxed{JK}c + \boxed{L}b + a$$

であるから

$$b = \boxed{M}a - \boxed{NO}c \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を得る。

①, ② を満たす  $a, b, c$  を求めると

$$a = \boxed{P}, \quad b = \boxed{Q}, \quad c = \boxed{R}$$

である。したがって、 $N$  を 10 進法で表すと  $\boxed{STU}$  であり、4 進法で表すと  $\boxed{VWXY}$  である。

---

注)  $p$  進法 : the base- $p$  system, 3 桁 : 3-digit

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 Z はマークしないでください。

IV

三角形 ABC において、 $\angle B = 45^\circ$ 、 $\angle C = 75^\circ$  とし、 $\angle A$  の 2 等分線と辺 BC との交点を D とする。

(1) 正弦定理より

$$AC = \frac{\sqrt{\boxed{A}}}{\boxed{B}} BC, \quad AD = \sqrt{\boxed{C}} BD$$

である。特に  $\angle ADC = \boxed{DE}^\circ$  より

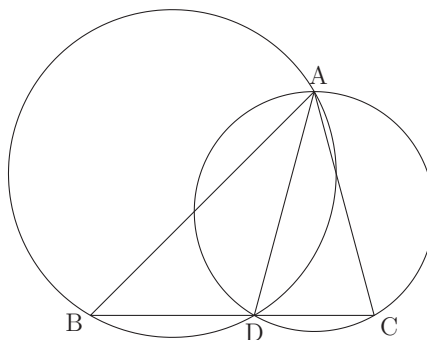
$$BD : BC = \boxed{F} : \sqrt{\boxed{G}}$$

となるので

$$AB : AC = \boxed{H} : \left( \sqrt{\boxed{I}} - \boxed{J} \right)$$

が得られる。

(2) 三角形 ABD の外接円の中心を  $O_1$ 、三角形 ADC の外接円の中心を  $O_2$  とする。三角形 ABC と三角形  $AO_1O_2$  の面積比  $\triangle ABC : \triangle AO_1O_2$  を求めよう。



$\angle AO_1D = \boxed{KL}^\circ$ 、 $\angle AO_2O_1 = \boxed{MN}^\circ$  であるから、(1) での考察より

$$AC = \sqrt{\boxed{O}} AO_1, \quad AO_2 = \left( \sqrt{\boxed{P}} - \boxed{Q} \right) AO_1$$

である。したがって

$$\triangle ABC : \triangle AO_1O_2 = \boxed{R} : \left( \boxed{S} - \sqrt{\boxed{T}} \right)$$

である。

注) 2 等分線 : bisector, 正弦定理 : the law of sines, 外接円 : circumscribed circle

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 U ～ Z はマークしないでください。  
コース1の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の V はマークしないでください。  
解答用紙の解答コース欄に「コース1」が正しくマークしてあるか、  
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。





# 数学 コース 2

(上級コース)

## 「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	○ コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1 2つの2次関数

$$f(x) = -2x^2, \quad g(x) = x^2 + ax + b$$

を考える。関数  $g(x)$  は次の2つの条件を満たしている。

(i)  $g(x)$  の値は  $x = 3$  で最小になる。

(ii)  $g(4) = f(4)$

(1) 条件 (i) より  $a = -$  **A** である。さらに、条件 (ii) より  $b = -$  **BC** を得る。したがって、関数  $g(x)$  の最小値は  $-$  **DE** である。

(2)  $f(x) = g(x)$  を満たす  $x$  で 4 と異なるものを求めよう。  $x$  は

$$x^2 - \text{F}x - \text{G} = 0$$

を満たすから、 $x = -$  **H** である。

(3)  $-$  **H**  $\leq x \leq 4$  において、 $f(x) - g(x)$  の値は  $x =$  **I** のとき最大になり、その値は **JK** である。

- 計算欄 (memo) -

数学-18

問 2 A と B の 2 人はともに 3 枚のカードが入っている袋をもっている。袋の中の 3 枚のカードには、それぞれ 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれている。2 人が同時に自分の袋から 1 枚のカードを取り出し、書かれている数の大きさを勝負を競う。同じ数が書かれたカードを取り出したときは引き分けとし、カードの数が異なるときは大きい数のカードを取り出した方を勝ちとする。

(1) 1 回の勝負で引き分けになる確率は  $\frac{\boxed{L}}{\boxed{M}}$  である。

(2) 以下、この勝負を 4 回実行するとき、次の確率を求めよう。ただし、取り出したカードは毎回元の袋に戻すこととする。

(i) A が 3 勝以上する確率は  $\frac{\boxed{N}}{\boxed{O}}$  である。

(ii) A が 1 勝 1 敗 2 引き分けになる確率は  $\frac{\boxed{P}}{\boxed{QR}}$  である。

(iii) A の勝つ回数と B の勝つ回数と同じになる確率は  $\frac{\boxed{ST}}{\boxed{UV}}$  である。したがって、  
A の勝つ回数が B の勝つ回数より多くなる確率は  $\frac{\boxed{WX}}{\boxed{UV}}$  である。

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わりです。 I の解答欄  Y ,  Z はマークしないでください。

II

問 1 次の文中の  $\boxed{\text{C}}$ ,  $\boxed{\text{D}}$ ,  $\boxed{\text{E}}$ ,  $\boxed{\text{F}}$ ,  $\boxed{\text{G}}$  には, 下の選択肢 ① ~ ⑨ の中から適するものを選び, その他の  $\boxed{\quad}$  には適する数を入れなさい。

1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。  $x$  は  $0 < x < 1$  を満たす数とし, 辺 AB を  $x : (1-x)$  に内分する点を P, 辺 BC を  $x : (1-x)$  に内分する点を Q とする。また,  $\overrightarrow{\text{OA}} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{\text{OB}} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{\text{OC}} = \vec{c}$  とおく。このとき,  $\cos \angle \text{POQ}$  の値の範囲を求めよう。

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$$

を満たす。

次に,  $\overrightarrow{\text{OP}}$  と  $\overrightarrow{\text{OQ}}$  は,  $\overrightarrow{\text{OP}} = \boxed{\text{C}}$ ,  $\overrightarrow{\text{OQ}} = \boxed{\text{D}}$  と表せるから

$$|\overrightarrow{\text{OP}}| = |\overrightarrow{\text{OQ}}| = \sqrt{\boxed{\text{E}}}, \quad \overrightarrow{\text{OP}} \cdot \overrightarrow{\text{OQ}} = \boxed{\text{F}}$$

となる。よって

$$\cos \angle \text{POQ} = \frac{1}{\boxed{\text{G}}} - \frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$$

である。

したがって, これより, 求める値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}} < \cos \angle \text{POQ} \leq \frac{\boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}}$$

である。

- |                               |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| ① $(1-x)\vec{a} + x\vec{b}$   | ① $x\vec{a} + (1-x)\vec{b}$   | ② $(1-x)\vec{b} + x\vec{c}$   |
| ③ $x\vec{b} + (1-x)\vec{c}$   | ④ $x^2 + x + 1$               | ⑤ $x^2 - x + 1$               |
| ⑥ $x^2 - x - 1$               | ⑦ $\frac{1}{2}(-x^2 + x + 1)$ | ⑧ $\frac{1}{2}(-x^2 - x + 1)$ |
| ⑨ $\frac{1}{2}(-x^2 + x - 1)$ |                               |                               |

注) 正四面体 : regular tetrahedron, 内分する : divide internally

- 計算欄 (memo) -

問 2 複素数平面上の 3 点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$  を頂点とする三角形  $ABC$  において

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 1 - i$$

であるとする。以下、偏角  $\theta$  の範囲は  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。

(1) 複素数  $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$  を極形式で表すと

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \sqrt{\boxed{\text{N}}} \left( \cos \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}} \pi + i \sin \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}} \pi \right)$$

である。よって、点  $C$  は、点  $B$  を点  $A$  を中心として  $\frac{\boxed{\text{Q}}}{\boxed{\text{R}}} \pi$  だけ回転し、さらに点  $A$  からの距離を  $\sqrt{\boxed{\text{S}}}$  倍した点である。これより、複素数  $w = \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$  の絶対値と偏角は

$$|w| = \boxed{\text{T}}, \quad \arg w = \frac{\boxed{\text{U}}}{\boxed{\text{V}}} \pi$$

である。

(2)  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  とすると

$$|\alpha| : |\beta| : |\gamma| = \sqrt{\boxed{\text{W}}} : \sqrt{\boxed{\text{X}}} : \sqrt{\boxed{\text{Y}}}$$

である。

---

注) 複素数平面 : complex plane, 偏角 : argument, 極形式 : polar form



- 計算欄 (memo) -

II の問題はこれで終わりです。II の解答欄 Z はマークしないでください。

III

関数

$$f(x) = 8^x + 8^{-x} - 3(4^{1+x} + 4^{1-x} - 2^{4+x} - 2^{4-x}) - 24$$

の最小値と、最小値をとるときの  $x$  の値を求めよう。

$2^x + 2^{-x} = t$  とおくと

$$4^x + 4^{-x} = t^2 - \boxed{\text{A}}, \quad 8^x + 8^{-x} = t^3 - \boxed{\text{B}}t$$

であるから

$$f(x) = t^3 - \boxed{\text{CD}}t^2 + \boxed{\text{EF}}t$$

と表せる。この右辺の  $t$  の関数を  $g(t)$  とおくと、その導関数は

$$g'(t) = \boxed{\text{G}}(t - \boxed{\text{H}})(t - \boxed{\text{I}})$$

である。ただし、 $\boxed{\text{H}} < \boxed{\text{I}}$  とする。

ここで、 $2^x + 2^{-x} = t$  であるから  $t$  のとる値の範囲は

$$t \geq \boxed{\text{J}}$$

である。

$t = \boxed{\text{J}}$  のとき  $g(\boxed{\text{J}}) = \boxed{\text{KL}}$  であり、 $t > \boxed{\text{J}}$  のとき  $g(t)$  は

$$t = \boxed{\text{M}} \text{ で、極大値 } \boxed{\text{NO}}$$

$$t = \boxed{\text{P}} \text{ で、極小値 } \boxed{\text{QR}}$$

をとる。

したがって、 $f(x)$  の最小値は  $\boxed{\text{ST}}$  であり、そのときの  $x$  の値は

$$x = \boxed{\text{U}}, \quad \log_2 \left( \boxed{\text{V}} \pm \sqrt{\boxed{\text{WX}}} \right) - \boxed{\text{Y}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 Z はマークしないでください。

IV

$k$  は正の実数とする。2 曲線

$$C_1 : y = \sin^2 x, \quad C_2 : y = k \cos 2x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。2 曲線  $C_1, C_2$  と  $y$  軸で囲まれる部分の面積を  $S_1$  とし、2 曲線  $C_1, C_2$  と直線  $x = \frac{\pi}{2}$  で囲まれる部分の面積を  $S_2$  とする。このとき、 $S_2 - S_1$  の値は  $k$  の値に関係なく一定であることを示そう。

等式  $\sin^2 x = k \cos 2x$  を満たす  $x$  を  $\alpha$  とおくと

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{k}{\boxed{\text{A}}k + \boxed{\text{B}}}}, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{k + \boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}k + \boxed{\text{E}}}}$$

である。

次に  $S_1, S_2$  を求めると

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}} \int_0^\alpha \left\{ (\boxed{\text{H}}k + \boxed{\text{I}}) \cos \boxed{\text{J}}x - 1 \right\} dx \\ &= \frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}} \left\{ \sqrt{k(k + \boxed{\text{M}})} - \alpha \right\}, \\ S_2 &= \frac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{O}}} \left\{ \sqrt{k(k + \boxed{\text{P}})} - \alpha \right\} + \frac{\pi}{\boxed{\text{Q}}} \end{aligned}$$

である。したがって

$$S_2 - S_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{R}}}$$

となり、 $S_2 - S_1$  の値は  $k$  の値に関係なく一定である。

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 S ~ Z はマークしないでください。  
コース2の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の V はマークしないでください。  
解答用紙の解答コース欄に「コース2」が正しくマークしてあるか、  
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

