

和算と生國魂神社における算額

森田健

要旨

本稿では、大阪府天王寺区にある生國魂神社の算額について述べる。当該の算額には、江戸時代の数学に関する4問の問題が記されているが、その内容に関しては解析されていなかった。そこで本稿では問題の構造を調べ、西洋数学の観点から問題を解くことによって、当時どのような問題に取り組んでいたのかを明確にした。

【キーワード】 数学 和算 算額 生國魂神社

1. はじめに

本稿の目的は、大阪市の生國魂神社に奉納されている算額について考察し、その上で問題の位置付けを現代数学の立場から明らかにすることである。

2. 和算の発展と算額

まず最初に、日本独自の数学である「和算」と「遺題継承」という文化、そして当時の数学の問題を収録した絵馬である「算額」について述べる。江戸時代中期～明治時代以降、西洋から輸入され現代に至る数学を「西洋数学」という。一方、それ以前に日本国内で発展した数学のことを「和算」と呼ぶ⁽¹⁾。一般的に、和算が広く普及したのは吉田光由(1627)による『塵劫記』の出版が原点であるとされている⁽²⁾。『塵劫記』には実用的な計算も多く含まれており、貴族や武士のみではなく、田畑の面積計算をおこなう農民にも必要なものであった⁽³⁾。これらの計算技術を含む“読み・書き・算盤”を教える塾は大流行し、19世紀には8万軒を超える個人塾が存在した⁽⁴⁾。このように和算が広く普及したのは、以下の2つの習慣が主な要因とされている。

1. 遺題継承

2. 算額奉納

遺題継承とは、当時の教科書に掲載されていた未解決の問題を解決した者が、新たに数学書を著した際に、自分が解いたその問題の解とともに新たな未解決問題を出題するというものである。当初は吉田光由が著書の高利貸対策として始めたものであったが、このシステムは当時の数学者たちの好奇心を刺激し、その後も続いた。また和算が広まるにつれ、塾で学んだことで新たな結果は得られたものの、著書を著すことが出来ない人々も現れた。こういった人々は、“問題の解決を神に感謝し、さらなる向上を願う”という意味を込め、研究成果を描いた絵馬を寺社に奉納するようになった。この奉納された絵馬のことを「算額」と呼ぶ。一般的に、彩色が鮮やかであったり図形の配置が凝っており、芸術的な様相を呈することが多い。以上2つの習慣によって切磋琢磨することで、高度に発展した数学が多くの人々に共有されることとなった。

こういった現象は日本固有のものであり、極めて特徴的である。その文化的・数学的な価値は大きく、当時の日本における数学のレベルを知る上では貴重な資料となり得る。そのため、江戸において活躍した関孝和をはじめとした和算家グループの仕事は、現代的な解釈を与えられていることが多い⁽⁵⁾。また、関西圏においても関孝和とは別に、橋本正数や宅間能清といった研究者が活発に研究をおこなっていたという記録が残っている⁽⁶⁾。一方で、民間ではどのような水準の数学が、どのように分布していたのかが未だ明確ではない。そこで著者は大阪府と奈良県における算額の分布状況に注目し⁽⁷⁾、大阪府下の畑天満宮における算額の問題を実際に解くことで、現代数学との対応関係を調査した⁽⁸⁾。本稿ではさらに調査を進めることを目的とし、以下に述べる生國魂神社の算額に描かれている問題を考察した。

3. 生國魂神社の算額

ここでは特に、大阪市天王寺区にある生國魂神社に奉納されている算額を紹介する。この算額は当時大きな数学者集団を形成していた宅間流の三代目、鎌田俊清の弟子である山口幸治郎によって、元文4（1739）年中夏（5月）に奉納された。ただし元々奉納されていたものは既に失われており、現在奉納されているものは図1の算額である。これは近畿数学史学会が復元し、南大江尋常高等小学校昭和14年3月卒業悠久会によって2002年7月21日に奉納されたものである⁽⁹⁾。この算額は、図2に挙げた『諸国神社仏閣掛所算術』⁽¹⁰⁾の記述を元に復元された。復元前の資料では、第2問にのみ簡易的な図が付されていることに注意したい。



図1 生國魂神社の復元された算額

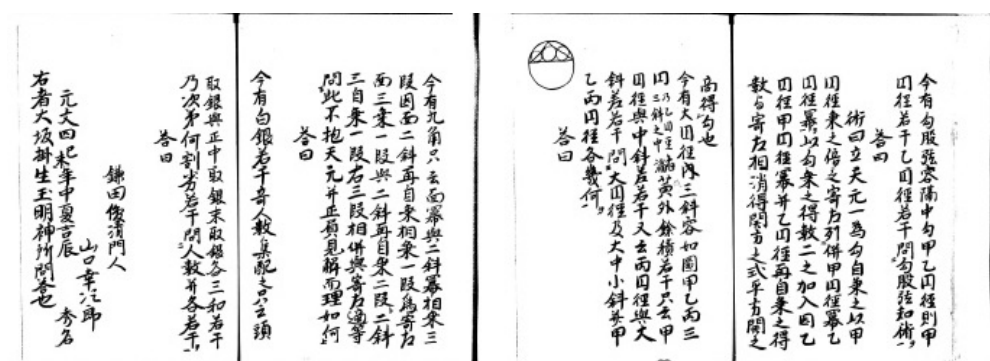


図2 復元の元となった『諸国神社仏閣掛所算術』における記述

4. 第1問

ここでは、第1問の問題文について述べる。基本的に和算では、円に関する量として半径ではなく直径を用いる点に注意する。

4-1 第1問の問題文の現代語訳と解釈

いま、図のように配置された直角三角形と2つの円を考える。任意の甲、乙の直径に対し、三角形の各辺（すなわち勾、爰および玄）を求める方法を述べよ。

図3に算額の原文を示す。原文には問題文とともに解法が記されている。図3中央の「答曰」から左側がその部分であり、天元術⁽¹¹⁾による解法が述べられている。盤面では、特に解を述べる際によく用いられる「術に曰く…」に続く部分に該当している。勾と各円の直径の乗を組み合わせることで2つの関係式を導出し、そこから得られる方程式の根が目的の量に相当することが説明されている。ただし、この解法には最低限の情報しか書かれておらず、三角形の他の辺との関係については記述されていない。また計算手順のみを記しているため、問題の構造を把握しにくいという難点がある。そのため本稿では、西洋数学における記号を援用して解説する。

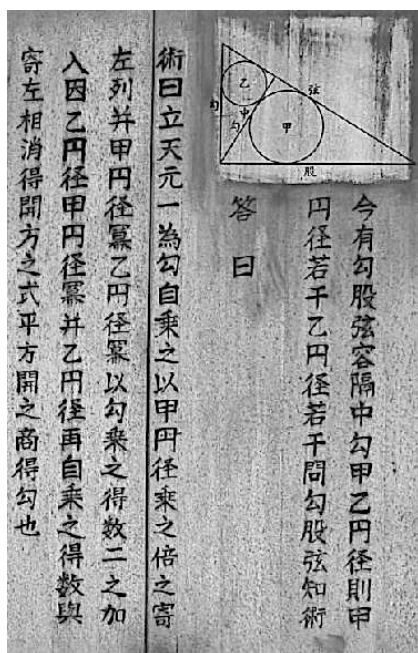


図3 第1問の盤面

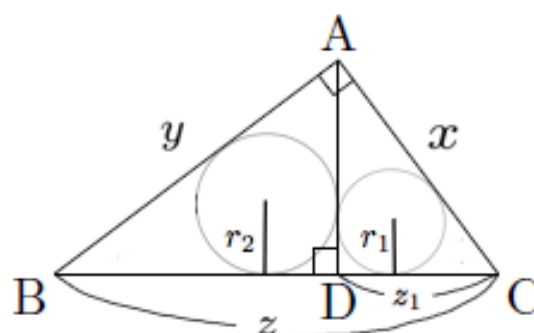


図4 書き直したもの

4-2 第1問の解答

三角形の辺について、図4のように文字 x, y, z および z_1 をおく。また、それぞれの円の半径を r_1 および r_2 とする。まずは各辺 x, y, z の関係を、 r_1 と r_2 を用いて表すことを考える。いま、 $\triangle ACB \sim \triangle DAB \sim \triangle DCA$ である。相似条件から、 $x : y = r_1 : r_2$ すなわち $xr_2 = yr_1$ である。よって、

$$y = x \frac{r_2}{r_1} \quad (1)$$

が成り立つ。また、三平方の定理から $z^2 = x^2 + y^2$ であり、(1) を用いると、

$$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(x \frac{r_2}{r_1}\right)^2 = x^2 \left\{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right\}.$$

ここで $z > 0$ なので、

$$z = x \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} \quad (2)$$

を得る。これにより、“ x と y の関係” および “ x と z の関係” が r_1 と r_2 を用いて表された。次に、 x を r_1 と r_2 を用いて表すことを考える。三角形 ABC の面積 S_{ABC} を考えると、

$$S_{\text{ABC}} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}z\text{BD}$$

と表されるので、

$$\text{BD} = \frac{xy}{z} \quad (3)$$

を得る。さらに相似条件から、 $z_1 : \text{BD} = \text{BD} : z_2 = x : y$ すなわち $z_1 : \text{BD} = x : y$ である。ここから $\text{BD}x = yz_1$ なので、

$$z_1 = \frac{x}{y}\text{BD} \quad (4)$$

を得る。関係式 (3)、(4) から、

$$z_1 = \frac{x}{y}\text{BD} = \frac{x}{y} \frac{xy}{z} = \frac{x^2}{z}$$

である。さらに先ほど得られた関係式 (2) を用いると、

$$z_1 = \frac{x^2}{x \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}} \quad (5)$$

と表すこともできる。

ここで $\triangle\text{ABD}$ の面積 $S_{\triangle\text{ABD}}$ を考える。

$$S_{\triangle\text{ABD}} = \frac{1}{2}z_1\text{BD} = \frac{1}{2}r_1(x + \text{BD} + z_1)$$

と 2 通りに表されることと、関係式 (3) を合わせて

$$z_1\text{BD} = z_1 \frac{xy}{z} = r_1 \left(x + \frac{xy}{z} + z_1\right)$$

となる。つまり

$$z_1 = r_1 \frac{z}{xy} \left(x + \frac{xy}{z} + z_1\right) = r_1 \frac{z}{y} + r_1 + r_1 \frac{z}{xy} z_1$$

である。これを z_1 について整理することで、関係式

$$\frac{xy - r_1 z}{xy} z_1 = r_1 \frac{z + y}{y}$$

を得る。文字 z_1 について解くと、

$$z_1 = \frac{x(z+y)}{xy - r_1 z}$$

である。関係式 (5) から $z_1 = \frac{x}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}}$ なので、

$$\frac{x}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}} = \frac{x(z+y)}{xy - r_1 z} r_1$$

を得る。関係式 (1) および (2) を右辺に用い、 x について整理することで、

$$x = \frac{r_1^2}{r_2} \left\{ 1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right\} + \frac{r_1^2}{r_2} \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2} + r_1 \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2}$$

となる。これにより、 x の長さが r_1 と r_2 を用いて表された。また、この結論を関係式 (1) と (2) に用いることで、

$$y = \frac{r_2}{r_1} x = r_1 \left\{ 1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right\} + r_1 \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2} + r_2 \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2},$$

$$\begin{aligned} z &= x \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2} = r_1 \left\{ 1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} + r_1 \left\{ 1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right\} + r_2 \left\{ 1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right\} \\ &= r_1 \left\{ 1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} + (r_1 + r_2) \left\{ 1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

を得る。以上によって、三角形の三辺は内接円の半径で表された。

5. 第2問

ここでは、第2問の問題文について述べる。図5のように、本問の三角形は第1問と異なり、直角三角形ではなく一般の三角形である。また、第2問、第3問および第4問は「答曰…」の部分が消失しているため、実際の解法がどのようなものであったかは不明である。以下でも詳しく述べるが、この問題に関しては問題設定がはっきりしない部分があるため、厳密に解を求めることは困難である。

5-1 問題文の現代語訳

図のような大円の中に三角形をおく。乙円が三角形に内接しており、さらに図のように甲円と丙円が配置されているものとする。いま、次の量が与えられているとする。

1. 大円から図の3つの円の面積を引いた量 (本文中では「黄外餘積」と表現されている。)
2. 甲円の直径と中斜の差
3. 丙円の直径と大斜の差

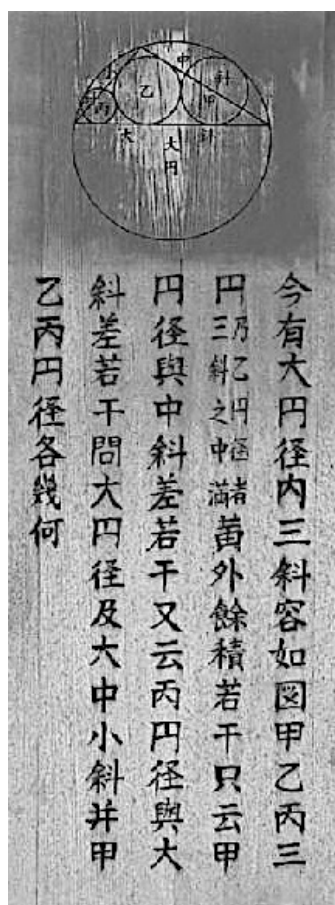


図5 第2問の盤面

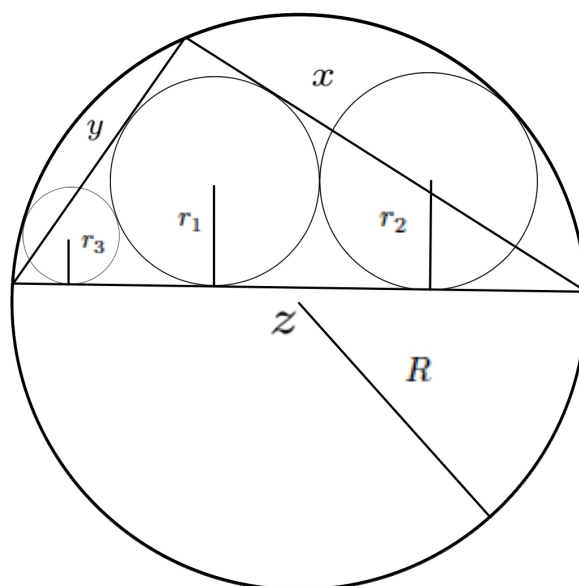


図6 書き直したもの

このとき、以下の量を求めよ。

- 大円径（大円の直径）
- 大斜、中斜、小斜の長さ
- 甲円、乙円、丙円のそれぞれの直径

5-2 第2問の構造

まず、与えられた条件 1. における「黄外餘積」の部分について考える。「餘積」は大きい図形の面積から小さい図形の面積を差し引いたものであるが、「黄外」の意味が曖昧である点に注意したい。恐らく、原典となった盤面は彩色されていたのだと考えられる。ここでは最も大きい円から内包する 3 つの円の面積を差し引いたものと解釈したが、正確さに欠けていると言わざるを得ない。

図 6 に表したように、乙円の半径を r_1 、甲円の半径を r_2 、丙円の半径を r_3 とする。また図のように、三角形の各辺について中斜を x 、小斜を y 、大斜を z とし、大円の半径を R とする。このとき、問題文中で与えられた量は以下のように表すことができる。

1. 大円から図の 3 つの円の面積を引いた量： $\Delta = \pi R^2 - (\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_3^2)$,
2. 甲円の直径と中斜の差： $\alpha = x - 2r_2$,

3. 丙円の直径と大斜の差： $\beta = z - 2r_3$.

これらから x, y, z, r_1, r_2, r_3 および R を導出し、 Δ, α, β を用いた表示を得ることが、この問題の目標である。

5-3 関係式の導出

求める変数は7個であるが、本文中の条件のみでは情報量が不足しており、解くことができない。従ってここでは、本問の図形に関する量を可能な限り導出し、問題の構造を解説することにする。まず、三角形の面積 S を考える。乙円は三角形に内接しているので、

$$S = \frac{r_1}{2}(x + y + z) \quad (6)$$

と表される。一方、余弦定理から $\cos C = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}$ なので、

$$\begin{aligned} \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} \\ &= \frac{\sqrt{2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4}}{2xy} \end{aligned}$$

である。一般に、分子の平方根の中身を因数分解すると

$$\sqrt{2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4} = (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)$$

となることを用いると、

$$\sin C = \frac{(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)}{2xy}$$

を得る。このとき、三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}xy \sin C = \frac{\sqrt{(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)}}{4} \quad (7)$$

となる。この結果はヘロンの公式としても知られているものである。関係式 (6) と (7) により、面積 S に関する2通りの表示が得られた。さらに正弦定理から $2R = \frac{z}{\sin C}$ なので、

$$R = \frac{z}{2 \sin C} = \frac{xyz}{\sqrt{(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)}} \quad (8)$$

である。関係式 (6) と (7) を用いると、

$$\frac{r_1}{2}(x + y + z) = \frac{\sqrt{(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)}}{4}$$

であるから、これを r_1 について解くと

$$r_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)}{x + y + z}} \quad (9)$$

という関係式も得られる。従って、もともと与えられていた3つの関係式に加えて (8) および (9) という、合わせて5つの関係式が導出されたことになる。しかし未知数の数に対して関係式の数がないため、完全には解くことができないことが判明した。

5-4 計算機による関係式の導出

仮に計算機を導入し（ここでは Mathematica を用いた）、かつ変数変換を行えば、もう一つの関係式を導出することは可能である。以下ではその過程を述べる。いま、問題文で与えられた関係式 1.（すなわち Δ に関するもの）と (8)、(9) から、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\pi} = & \frac{x^2 y^2 z^2}{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)} \\ & - \frac{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}{4} \\ & - \frac{(x-\alpha)^2}{4} - \frac{(z-\beta)^2}{4} \end{aligned} \quad (10)$$

である。この状態で Mathematica に入力し x, y, z についての関係式を導出しようとする
と、時間オーバーになってしまい計算できない。そこで変数変換として

$$\begin{aligned} s &= -x + y + z, \\ t &= x - y + z, \\ u &= x + y - z \end{aligned}$$

を導入する。このとき (10) は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\pi} = & \frac{(t+u)^2(s+u)^2(s+t)^2}{8^2(s+t+u)stu} \\ & - \frac{1}{4} \frac{stu}{s+t+u} - \frac{1}{4} \left(\frac{t+u}{2} - \alpha \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{s+t}{2} - \beta \right)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

この式は計算機で扱うことが可能になり、Mathematica であれば

```
Solve D/Pi -((t+u)(s+u)(s+t))^2/(64(s+t+u)s*t*u)=- (s*t*u)/(4(s+t+u))
-((t+u)/2-A)^2/4-((s+t)/2-B)^2/4, {s,t,u}
```

などと入力することで、“ u を s と t で表現した式”を得ることができる。ただし、1つの式が A4 サイズの紙 6 枚分に相当する量となってしまう、この結果を用いて計算を続行することは現実的ではない。

実はこの問題は、問題における文字設定の自由度が極めて高く、無理に計算を進めると上記のような難解な関係式が出現する。またそれらを用いた計算結果も、その煩雑な過程に伴って複雑な形になってしまう。現時点では必ずしも断定は出来ないが、問題設定のための条件が（書き写し等の段階で）抜け落ちてしまっている可能性が高い。例えば、「甲円と丙円の中心は、中斜および小斜上にあるものとする」という条件を付け加えると、より簡潔な関係式が導出可能になる。ただしこの条件が確実であると言い切るための裏付けが無いため、ここでの言及は避けることにする。

6. 第3問

ここでは、第3問について考える。図7を一見すると正九角形という図形にのみ焦点を当てがちだが、与えられた方程式にも注目したい。こちらも第2問と同様、解答部分は消失している。

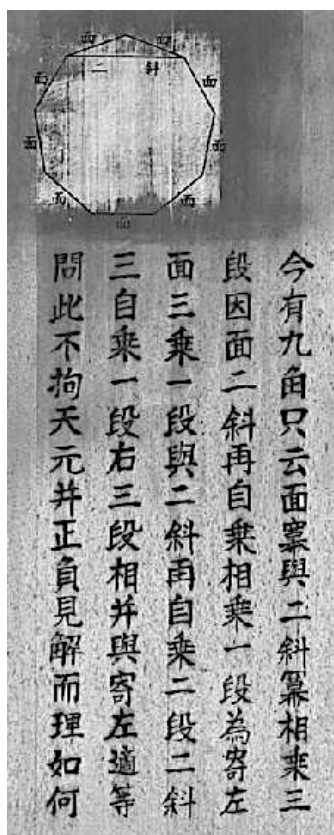


図7 第3問の盤面

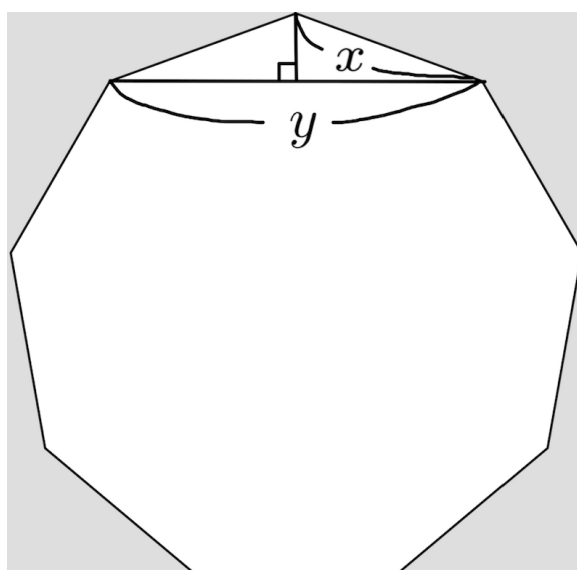


図8 書き直したもの

6-1 問題文の現代語訳

図のような正九角形を考える。辺の2乗に、二斜を2乗したものの3倍を掛け合わせる。さらに辺と二斜を掛けたものを3乗し、先ほどの式に掛け合わせたものを第1式（本文中では「左」と表現している）とする。また、辺を3倍したものに二斜を3乗したものを足し、さらに二斜を3乗したものを加えたものを第2式（本文中では「右」と表現している）とする。いま、第1式と第2式が等しいという条件を与えたとする。このとき、辺と二斜の関係を正負込みで説明せよ。

6-2 解法と適合する解

まずは問題文に従って式を作る。本文中の「面」とは現在の「辺」に相当するものである。図8のように面を x 、二斜を y と表すことにすると、

$$\begin{cases} x^2 \times y^2 \cdot 3 \times (xy)^3 & = \text{左}, \\ 3x + y^3 + 3y & = \text{右} \end{cases}$$

となる。これから、関係式

$$x^2 \times y^2 \cdot 3 \times (xy)^3 = 3x + y^3 + 3y \quad (12)$$

を得る。さらに与えられた図形が正九角形ということから、図の直角三角形に注目する。三角形の底辺は二斜の半分であるから、

$$\frac{y}{2} = x \cos \frac{\pi}{9} \quad (13)$$

である。関係式 (12) および (13) から、 x についての 10 次方程式が得られたということになる。ここで $\cos \frac{\pi}{9}$ の近似値が $\cos \frac{\pi}{9} \doteq 0.9396926207 \dots$ であることを用いて x を求めると、10 個の解

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ x \doteq 0.830469 \dots, \\ x \doteq 0.112449 + 0.740265i, \\ x \doteq 0.112449 - 0.740265i, \\ x \doteq 0.589938 + 0.547036i, \\ x \doteq 0.589938 - 0.547036i, \\ x \doteq -0.351574 + 0.690358i, \\ x \doteq -0.351574 - 0.690358i, \\ x \doteq -0.766048 + 0.303498i, \\ x \doteq -0.766048 - 0.303498i \end{array} \right.$$

を得る。ここで、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。この 10 個の解の中で、辺の長さとして適切なもの（すなわち正の値を取るもの）はただ一つ、 $x \doteq 0.830469 \dots$ である。またこの値を (13) に用いることで、二斜の値 $y \doteq 1.560771 \dots$ が得られる。以上により、条件を満たす解の組 (x, y) はただ 1 つであることも同時に判明した。

算額の問題文としては珍しく、単に数値を問うのではなく「正負込みで説明せよ」と、解法にも焦点を当てている。おそらく（複素数解を含む）他の解の存在を見越しているのだと考えられる。この当時は未だ西洋数学でいうところの「複素数解」という概念は無かったが、「考察している 10 次方程式の解として形式的に出てくるものの、問題の条件には不適切な数のようなもの」といったような捉え方をしていたのではないかと考えられる。無論、複素数そのものの扱いも確立されていなかったという時代背景を考慮すると、出題者は相当慎重に研究を進めていたことが窺われる。

6-3 登場する方程式の背景—無限級数との関わりについての考察

さらに、方程式 (12) について解説する。方程式 (12) は x に関しての 5 次方程式であり、以下のように近似的に y を用いて表すことができる。

$$x \approx -0.333333(y^3 + 3y)_4F_3(0.2, 0.4, 0.6, 0.8; 0.5, 0.75, 1.25; 0.150704y^5(y^3 + 3y)^4).$$

ここで登場する ${}_4F_3(a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3; x)$ とは、

$${}_4F_3(a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n (a_3)_n (a_4)_n}{(b_1)_n (b_2)_n (b_3)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (a)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a + k)$$

で与えられる、「一般超幾何級数」と呼ばれる無限級数である。著者のように特殊函数を専門としていれば扱うことはあるが、一般的にはあまり知られていない研究対象である。また、厳密に論じるためには複素函数論をはじめとする現代数学の知識を必要とする。このような複雑な方程式を設定した理由は、出題者である山口幸治郎の単なる思い付きではなく、所属していた数学者集団にある。算額の盤面にもあるように、彼は宅間流の三代目である鎌田俊清の弟子であった。鎌田俊清は著書『宅間流圓理』⁽¹²⁾の中で、無限級数を用いることで $\sin x$ や $\arcsin x$ のマクローリン展開の式を得ている。鎌田のもとで研究を進める中で、種々の無限級数の性質やそれらが満たす方程式に関する膨大な結果から、図形との相性の良い方程式 (12) を出題したと考えられる。条件を満たす解が一意に定まるという、出題の精密さも驚嘆に値する。

7. 第4問

ここでは、第4問について述べる。第2問、第3問と同様に、「答曰…」以降の解答部分は消失している。

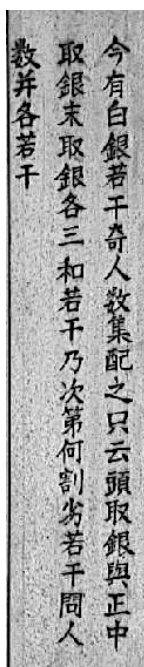


図9 第4問の盤面

7-1 問題文の現代語訳

図9に基づき、現代語訳する。いま、白銀を奇数人で分配することを考える。まず首位の者（本文中では「頭」と表現されている）が取り、次に中位の者が一定の割合だけ減らして取るとする。さらに、末位の者が一定割合だけ減らして取るようにしたとする。このとき、人数と減少させる割合（の関係）を求めよ。

7-2 解説と具体例

この問題は、条件付きの多元方程式を解くことに帰着される。首位を x 人、中位を y 人、末位を z 人と表したとする。問題文の条件から x, y および z は自然数であり、 $x + y + z$ は

奇数ということになる。仮にこれを $N(=x+y+z)$ と表す。また、位が下の者の方が人数が多くなり、各位の人数は $x < y < z$ という関係を満たすということになる。上位の者から白銀を t, u そして v だけ取る (ただし $v < u < t$) とすれば、白銀の総量を M としたとき、

$$\begin{cases} N = x + y + z, & x < y < z \\ M = tx + uy + vz, & v < u < t \end{cases} \quad (14)$$

という方程式 (および不等式) の解を求めればよいということである。問題文で問われている「減少させる割合 (取り分の減少率)」は、 t, u および v が与えられた時点で同時に求められる点に注意しておく。

この問題は、まず白銀の総量 M と各々の取り分 (t, u および v) もしくは人数 (x, y および z) が定数として与えられ、その条件下で方程式 (14) を満たす残りの量を求めることになる。方程式 (14) と適切な数値が明示的に与えられた時点で、理論上は解くことが可能である。だが、 x, y および z が自然数という条件を満たす解が存在するかどうかは自明ではない。そこで条件を満たす解の具体例を、実際に以下のように構成した。

7-2-1 解の具体例 1—取り分の減少率が一定の場合

まずは、取り分の減少率が一定の場合を考える。総量 $M = 1126$ 、首位 (頭) の取り分が $t = 16$ 、中位の取り分が $u = 12$ 、末位の取り分が $v = 9$ とする。この場合、各位の取り分の減少率が $3/4 = 75\%$ ということになる。さらに首位の者が 1 名、つまり $x = 1$ の集団とする。このとき、方程式 (14) に上記の値を代入して解くと、

$$(y, z) = (40, 70)$$

という解を得る。先ほど仮定した $x = 1$ と合わせると $x + y + z = 111$ となり、合計人数が奇数であるという条件を満たしていることが確認できる。従って方程式の 1 つの解として、 $(M, x, y, z, t, u, v) = (1126, 1, 40, 70, 16, 12, 9)$ が得られたということである。

7-2-2 解の具体例 2—取り分の減少量が一定の場合

次に、総量 $M = 124$ 、首位の取り分 $t = 10$ 、中位の取り分 $u = 7$ 、末位の取り分 $v = 4$ という場合を考える。この場合、各位の取り分の差分が 3 ということになる。さらに首位の者が 1 名、つまり $x = 1$ の集団を考えることにする。この場合、(14) に上記の値を代入して解くと、

$$(y, z) = (6, 18)$$

という解が得られる。先ほど仮定した $x = 1$ と合わせると $x + y + z = 25$ となっており、奇数であるという条件を満たすことが確認できる。すなわち方程式 (14) の解の 1 つとして、 $(M, x, y, z, t, u, v) = (124, 1, 6, 18, 10, 7, 4)$ が得られたということである。

7-2-3 解の具体例 3—取り分の減少量が一定ではない場合

最後に、減少率にこだわらない場合を考える。総量 $M = 100$ 、首位の取り分 $t = 10$ 、中位の取り分 $u = 6$ 、末位の取り分 $v = 3$ という場合を考える。上記の具体例と異なり、減少

量は一定ではない。さらに首位の者が1名と仮定して方程式(14)に代入すると、

$$(y, z) = (6, 18)$$

が解として得られる。こちらも $x + y + z = 25$ となり、問題の条件を満たしていることが確認できる。従って $(M, x, y, z, t, u, v) = (100, 1, 6, 18, 10, 6, 3)$ もまた、方程式(14)の解の1つであることが分かる。

今回は数字の分かりやすさを優先し、 (t, u, v) はいずれも自然数と仮定して上記の解を求めた。しかし、白銀の量は必ずしも自然数として与えられる必要はなく、正の数であれば問題ない。一方で、 (x, y, z) は人数を表す量であるから、いずれも自然数で与えられることに留意する必要がある。

8. まとめと今後の課題

以上により、生國魂神社における算額で扱われている問題では、高度な背景理論に根ざした大変高度な水準の数学が展開されていることが解明された。第1問では、相似な三角形の性質を駆使しつつ、内接する円との関係を調べる問題であった。典型的な技術を用いる部分もあるが、方針を立て間違えると手に負えない計算が現れるという意味では難問である。第2問では、盤面の色の喪失や文章の曖昧さにより、明確な解には辿り着かなかった。しかし今後、同様の問題の研究を進めることで解決に至る可能性もあるため、特に宅間流の計算技術の蓄積が必要であると考えられる。また第3問は、一見すると正九角形という図形のみに目を奪われがちだが、同時に考察する方程式も深い背景が垣間見られるものであった。第4問は多元方程式に関するものであるが、白銀の分配にその数学的要素を見出している点が興味深い問題であると言える。280年以上前の段階で、これほど卓越した数学が構築されていたことには驚きを禁じ得ない。冒頭にも述べた通り、関西圏だけでもまだ解明されていない算額が多数存在している。引き続き調査を行い、当時の数学の水準を明らかにすることが今後の課題である。

注

- (1) 上野 他 (2008) を参照。
- (2) 佐藤 他 (2006) を参照。
- (3) 城地 (2014) を参照。
- (4) 城地 (2014) を参照。
- (5) 竹之内 (2008) を参照。
- (6) 佐藤 他 (2006) による。
- (7) この点については森田 (2020) に述べた。
- (8) 森田 (2022) で述べた。
- (9) 詳細は近畿数学史学会 (1992) に述べられている。
- (10) 羽賀 (1939) による。
- (11) 天元術とは方程式の解法の一つであり、その名前は「立天元一為…」という出だしで始まることに由来する。
- (12) 鎌田 (1722) による。

参考文献

- (1) 上野健爾・小川東・小林龍彦・佐藤賢一 (2008) 『関孝和論序説』岩波書店
- (2) 鎌田俊清 (1722) 『宅間流圓理 卷ノ一、二』(写本) 東京大学蔵版
- (3) 近畿数学史学会 (1992) 『近畿の算額—数学の絵馬を求めて—』
- (4) 佐藤 健一・小寺 裕・大竹 茂雄・牧野 正博 (2006) 『和算史年表』東洋出版
- (5) 城地茂 (2014) 『和算の再発見：東洋で生まれたもう一つの数学』Dojin 選書
- (6) 竹之内 脩 (2008) 『関孝和の数学』共立出版
- (7) 羽賀 与七郎 (1939) 『諸国神社仏閣掛所算術』羽賀集書目録, 東北大学附属図書館 所蔵
- (8) 平山 諦 (1993) 『和算の誕生』恒星社厚生閣
- (9) 深川英俊 (1998) 『例題で知る日本の数学と算額』森北出版
- (10) 森田 健 (2020) 「日本文化としての数学：和算と算額」『日本語・日本文化』47, 大阪大学
日本語日本文化教育センター, pp.81-107
- (11) 森田 健 (2022) 「畑天満宮に奉納された算額の問題と厳密解」『日本語教育センター紀要』第 18
号, pp.15-26
- (12) 吉田光由 (大矢真一校注) (1977) 『塵劫記』岩波文庫, 岩波書店