

和算と井於神社における算額

森田健

要旨

本稿では、大阪府にある井於神社の算額について述べる。この算額には、江戸時代の数学に関する 9 題の問題が記されているが、その解法については断片的な情報しか存在しなかった。そこで本稿では問題の構造を調べ、当時どのような問題に取り組んでいたのかを明確にした。

【キーワード】 数学 和算 算額 井於神社

1. はじめに

本稿の目的は、大阪府茨木市の井於神社に奉納されている算額について考察し、問題の位置付けを現代数学の立場から明らかにすることである。

2. 和算の広がりと言額

江戸時代中期～明治時代以降にヨーロッパから輸入され、現代数学に至る数学のことを「西洋数学」と呼ぶ。一方、それ以前に日本国内で発展した数学のことを「和算」という。吉田光由 (1627) による『塵劫記』によって和算は広く普及し、その実用性の高さから、19 世紀には 8 万軒を超える個人塾が存在したとされる。『塵劫記』以降の多くの和算書には未解決の問題が付されていた。その問題を解いた和算家が解答を自著に載せ、さらに新たな未解決問題を掲載した。この一連のサイクルは“遺題継承”と呼ばれる。和算書における遺題継承以外にも、未解決問題の解決を公表する手段として“算額奉納”と呼ばれる文化があった。これは「問題の解決を神仏に感謝し、数学力の向上を願う」という意味を込めて、研究成果を記した絵馬を寺社に奉納するというものである。この奉納された絵馬を算額とよぶ。これら遺題継承および算額奉納という習慣により、和算は大きな発展を遂げる。江戸において活躍した関孝和をはじめとする和算家たちの仕事は、当時の世界最高峰の数学であったことも近年の研究で明らかになっている。また佐藤ら (2006) によると、関西圏においても関孝和とは別に、橋本正数や宅間能清といった著名な和算家が研究を行ったという記録も残っている。他方、民間で研究されていた数学がどのような水準で、どのように分布していたのかは未だ明確ではない。そこで筆者は大阪府と奈良県における算額の分布状況に注目し、これまでに大阪府下の畑天満宮の算額および生國魂神社の算額の問題を実際に分析することで、現代数学との対応関係を調査した。

3. 井於神社の算額

本稿では上記の研究に続くものとして、大阪府茨木市にある井於神社の算額について述べる。この算額は、弘化 3(1846) 年に宇野部村 (現在の大阪府茨木市) の山野光之助によって奉納されたものである。昭和 25 年の台風によって破損したが、『社寺奉納算学集』の下巻 377 ページに盤面の記録が残っており、その記述に基づき昭和 50 年に復元された。裏面には復元の由来が記述されている。本算額には、図形に関連する 9 題の問題が含まれている。この中にはインターネット上の記事に解法が部分的に書かれている問題もあるが、明確に問題の構造や解法を示しているわけではなく、数学的にはやや不完全であると言わざるを得な

い。そこで本稿では、当時の考え方を併用しつつ、問題の構造をより明確にすることを目標とする。



図1 復元された井於神社の算額

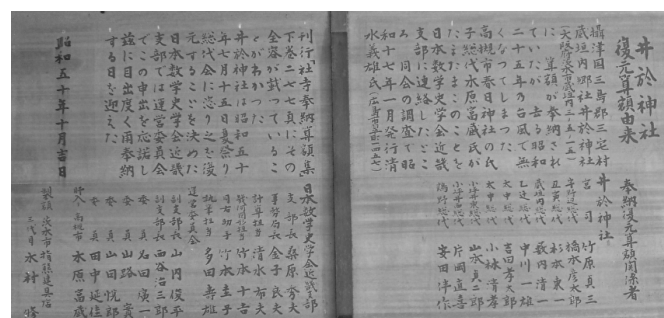


図2 裏面に書かれた復元の由来

4. 第1問

4-1 第1問の問題文の現代語訳と解釈

図4のような直角三角形を考える。鉤の長さを2寸7分、股の長さを3寸6分、弦の長さを4寸5分とすると、図の正三角形の一边はどのような長さになっているか求めよ。

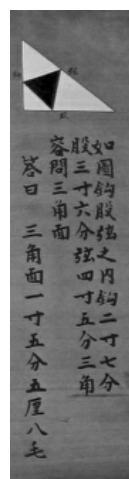


図3 第1問の盤面

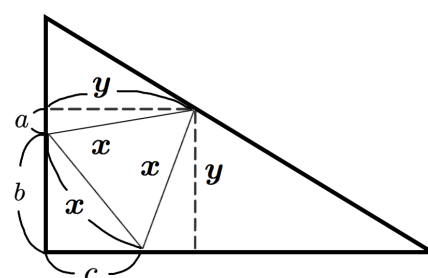


図4 書き直したもの

4-2 第1問の解答

以下では鉤の長さを2.7、股の長さを3.6、弦の長さを4.5として計算する。この条件は三平方の定理 $(2.7)^2 + (3.6)^2 = (4.5)^2$ を満たしていることに注意する。また、図における補助線を引くことができると仮定し、各辺の長さを a, b, c, x および y とする。このとき、三平方の定理を用いることで3つの関係式 $a^2 + y^2 = x^2$ 、 $b^2 + c^2 = x^2$ および $(y - c)^2 + y^2 = x^2$

が得られる。図から $y = a + b$ であり、さらに相似な三角形の辺の長さの比について

$$2.7 - (a + b) : y = y : 3.6 - y \quad (1)$$

が成り立つ。ここで辺の間の関係式 $y = a + b$ を用いて文字 y を消去すると

$$a^2 + (a + b)^2 = x^2, \quad (2)$$

$$b^2 + c^2 = x^2, \quad (3)$$

$$(a + b - c)^2 + (a + b)^2 = x^2. \quad (4)$$

であり、関係式 (1) は

$$\{2.7 - (a + b)\}\{3.6 - (a + b)\} = (a + b)^2 \quad (5)$$

となるので、これらの連立方程式を考える。方程式 (2) と (3) から、関係式

$$2a^2 + 2ab - c^2 = 2a(a + b) - c^2 = 0 \quad (6)$$

が得られる。また (2) と (4) から $(a + b - c)^2 + (a + b)^2 = a^2 + (a + b)^2$ すなわち

$$(a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2 - a^2 = 0 \quad (7)$$

である。ここで関係式 (5) を整理すると $2.7 \times 3.6 - 2.7(a + b) - 3.6(a + b) + (a + b)^2 = (a + b)^2$ つまり $a + b = \frac{2.7 \times 3.6}{6.3} = 1.542857 \dots$ である。これは定数であり、煩雑さを避ける意味で以下では K と表すことにする。この定数 K を用いて (6)、(7) を書き直すと

$$2Ka - c^2 = 0 \quad (8)$$

$$K^2 - 2Kc + c^2 - a^2 = 0 \quad (9)$$

である。ここで得られた関係式 (8) および (9) を連立させ、文字 c についての方程式を作ると $\frac{1}{4K^2}c^4 - c^2 + 2Kc - K^2 = 0$ すなわち $c^4 - 4K^2c^2 + 8K^3c - 4K^4 = 0$ である。この式は $(c^2 + 2Kc - 2K^2)(c^2 - 2Kc + 2K^2) = 0$ という形に因数分解でき、それぞれの 2 次式を文字 c について解くと、 i を虚数単位として

$$c_1 = (1 - i)K \text{ (複素数であるため不適)},$$

$$c_2 = (1 + i)K \text{ (複素数であるため不適)},$$

$$c_3 = -\sqrt{3}K - K \text{ (負の数であるため不適)},$$

$$c_4 = (\sqrt{3} - 1)K (> 0 \text{ を満たす})$$

という 4 つの解が得られる。この中で解として適しているのは c_4 のみであり、その近似値は $c_4 = (\sqrt{3} - 1)K = (\sqrt{3} - 1) \times \frac{2.7 \times 3.6}{6.3} = 1.1294 \dots$ である。よってこの値

$c = 1.1294 \dots$ を用いることで、残りの文字 a, b, x, y を求める。関係式 (8) から $a = \frac{c^2}{2K} = 0.4134074591 \dots$ である。また $a + b = K$ から、 $b = K - a = 1.1294 \dots$ となる。これは c の値と一致しており、 $b = c$ の二等辺三角形となっていることも確認できる。またこのとき (2) から $a^2 + (a + b)^2 = x^2$ すなわち $a^2 + K^2 = x^2$ であることから、 x の符号に注意すると $x = +\sqrt{a^2 + K^2} = 1.59728 \dots$ である。従ってこれが求める値である。盤面に記述されている解答は 1 寸 5 分 5 厘 8 毛であり、かなり近い値を導出していることが確認できる。

5. 第2問

5-1 第2問の問題文の現代語訳と解釈

図6の三角形において、大斜の長さを4寸、中斜の長さを2寸7分、小斜の長さを1寸8分とすると、内接円の直径を求めよ。

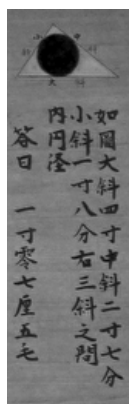


図5 第2問の盤面

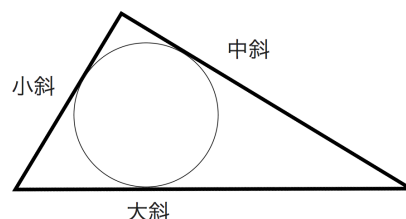


図6 書き直したもの

5-2 第2問の解答

第1問と同様にし、それぞれの辺の長さを(大斜) = 4, (中斜) = 2.7, (小斜) = 1.8として考える。まず、ヘロンの公式を用いて三角形の面積を求めておく。それぞれの辺の長さから、 $s = \frac{4 + 2.7 + 1.8}{2} = \frac{8.5}{2} = 4.25$ となる。この s を用いると $s - 4 = 0.25$, $s - 2.7 = 1.55$, $s - 1.8 = 2.45$ なので、面積 S は $S = \sqrt{4.25 \times 0.25 \times 1.55 \times 2.45} = 2.00869 \dots$ である。一方で内接円の半径を r とすると、三角形の面積は $S = \frac{r}{2}(4 + 2.7 + 1.8) = \frac{8.5r}{2} = 4.25r$ と表すことができるので、 $2.00869 \dots = 4.25r$ という関係式が得られる。よって半径は $r = \frac{2.00869 \dots}{4.25} = 0.4726329411764 \dots$ であることがわかる。従って、求める直径は $2r = 0.94526588235 \dots$ である。盤面における解答は1寸0分7厘5毛 = 1.075 となっている。これはほぼ1寸であることから、誤差として許容範囲内であると考えられる。

6. 第3問

6-1 第3問の問題文の現代語訳と解釈

図8のような直角三角形を考える。鉤の長さが3寸、股の長さが4寸、弦の長さが5寸のとき、2つに分割した直角三角形のそれぞれの内接円の直径を求めよ。

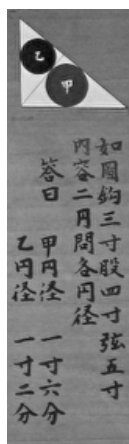


図7 第3問の盤面

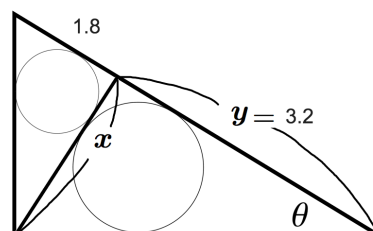


図8 書き直したもの

6-2 第3問の解答

まず、図8のように辺の長さ x, y および角度 θ をおく。このとき $x = 4 \sin \theta$ である。また与えられた辺の長さから $\sin \theta = \frac{3}{5}$ なので、 $x = 4 \sin \theta = 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$ である。また図の y の長さも求めておくと、 $y = 4 \cos \theta$ であり、辺の長さから $\cos \theta = \frac{4}{5}$ なので、 $y = 4 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$ である。よって、それぞれの辺の長さは図のようになっていることがわかる。以下では、第2問と同様の考え方を用いて計算する。

- まず、大きい三角形について考える。先ほど求めた3つの辺の長さを用いて $s_1 = \frac{2.4 + 3.2 + 4}{2} = \frac{9.6}{2} = 4.8$ とする。このとき、 $s_1 - 2.4 = 2.4$, $s_1 - 3.2 = 1.6$, $s_1 - 4 = 0.8$ である。よって三角形の面積を S_1 とすると、ヘロンの公式から $S_1 = \sqrt{4.8 \times 2.4 \times 1.6 \times 0.8} = 3.84$ である。また三角形の面積 S_1 は、内接円の半径 r_1 を用いると $S_1 = \frac{r_1}{2}(2.4 + 3.2 + 4)$ となり、 $3.84 = 4.8r_1$ すなわち $r_1 = \frac{3.84}{4.8} = 0.8$ であるから、求める直径は $2r_1 = 1.6$ である。これは盤面の解答1寸6分と一致する。
- 続いて小さい三角形について考える。上記と同様にそれぞれの辺の長さを用いると $s_2 = \frac{2.4 + 1.8 + 3}{2} = 3.6$ である。このとき、 $s_2 - 2.4 = 1.2$, $s_2 - 1.8 = 1.8$, $s_2 - 3 = 0.6$ である。三角形の面積を S_2 とすると、ヘロンの公式から $S_2 = \sqrt{3.6 \times 1.2 \times 1.8 \times 0.6} = 2.16$ である。また三角形の面積 S_2 は、内接円の半径 r_2 を用いて $S_2 = \frac{r_2}{2}(2.4 + 1.8 + 3)$ と表されるので、 $2.16 = 3.6r_2$ すなわち $r_2 = \frac{2.16}{3.6} = 0.6$ である。よって求める直径は $2r_2 = 1.2$ である。こちらも盤面の解答1寸2分と一致している。

7. 第4問

7-1 第4問の問題文の現代語訳と解釈

直径が8寸の円を考える。図10のように均等に分けた時、これをそれぞれ一番、二番、三番、四番、五番と表す。各々の長さを求めよ。

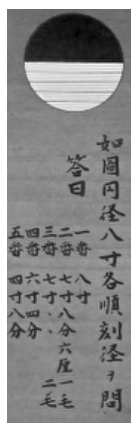


図9 第4問の盤面

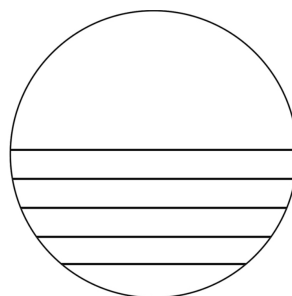


図10 書き直したもの

7-2 第4問の準備

こちらは三平方の定理を用いることで直接計算を行うことが可能である。しかし当時の数学者、今村知商による最先端の技法である『弧矢弦の式』^{こしげん}を用いる方が自然な解き方であると考えられる。そこで、まず『弧矢弦の式』の証明を行うことにする。

定理 (『豎亥録』(1639)中の「弧矢弦の式」)

半径 r の円を考える。図 11 において、関係式 $4c(2r - c) = a^2$ が成り立つ。

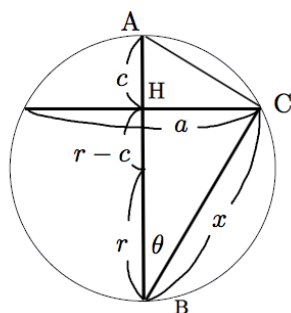


図 11 『弧矢弦の式』における文字の設定

証明 まず AB は直径なので、円周角の定理から三角形 ABC は直角三角形である。よって $\cos \theta = \frac{x}{2r}$ である。また余弦定理から $\triangle CHB$ について $\cos \theta = \frac{(2r - c)^2 + x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2(2r - c)x}$ で

ある。よって $\frac{x}{2r} = \frac{(2r - c)^2 + x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2(2r - c)x}$ となる。これを x について整理すると

$$x^2 = (2r - c)^2 \cdot \frac{r}{r - c} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{r}{r - c} \quad (10)$$

となる。一方、三平方の定理から

$$x^2 = (2r - c)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (11)$$

も成り立つ。よって関係式 (10)、(11) から $(2r - c)^2 \cdot \frac{r}{r - c} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{r}{r - c} = (2r - c)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ であり、これを整理すると $\frac{r - (r - c)}{r - c} \cdot (2r - c)^2 = \frac{r + r - c}{r - c} \left(\frac{a}{2}\right)^2$ である。両辺を整理し、 $2r - c \neq 0$ で割ると $c(2r - c) = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ すなわち $4c(2r - c) = a^2$ となり、結論を得た。□

この結果は今村知商によって得られたが、第 4 問ではさらに本定理の応用を考えている。

7-3 第 4 問の解答

以下では問題の解答を示す。以下では半径 $r = \frac{8}{2} = 4$ のもとで考える。

- 図における“一番”とは直径のことであり、問題文の条件から 8 寸である。これは盤面の解答と一致する。
- 図の“二番”において、弧矢弦の式における c の値は $c_1 = \frac{8}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$ である。このとき、求める a の値を $a_1 > 0$ とすると、弧矢弦の式から $a_1^2 = 4 \times 3.2(8 - 3.2) = 61.44$ である。よって、 $a_1 = 7.8383671769061\dots$ と求められる。盤面における解答は 7 寸 8 分 6 厘 1 毛 となっており、かなり近い値を導出していると言える。
- 図の“三番”において、弧矢弦の式における c の値は $c_1 = \frac{8}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$ である。このとき、求める a の値を $a_2 > 0$ とすると、弧矢弦の式から $a_2^2 = 4 \times 2.4(8 - 2.4) = 53.76$ である。よって、 $a_2 = 7.3321211119293\dots$ と求められる。盤面では 7 寸**2 毛 となっており、「**」はおそらく復元時に読み取ることができなかった部分であろう。今回の結果により、解は「7 寸 3 分 3 厘 2 毛…」であることが判明したため、上述の「**」には「3 分 3 厘」と書かれていることが示唆された。

4. 図の“四番”において、弧矢弦の式における c の値は $c_1 = \frac{8}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$ である。このとき、求める a の値を $a_3 > 0$ とすると、弧矢弦の式から $a_3^2 = 4 \times 1.6(8 - 1.6) = 40.96$ である。よって、 $a_3 = 6.4$ と求められる。これは盤面の解答である 6 寸 4 分 と一致する。
5. 図の“五番”において、弧矢弦の式における c の値は $c_1 = \frac{8}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$ である。このとき、求める a の値を $a_4 > 0$ とすると、弧矢弦の式から $a_4^2 = 4 \times 0.8(8 - 0.8) = 23.04$ である。よって、 $a_4 = 4.8$ と求められる。これは盤面の解答である 4 寸 8 分 と一致する。

以上により、それぞれの長さが求められた。

8. 第 5 問

8-1 第 5 問の問題文の現代語訳と解釈

図 13 の直角三角形において、勾を 3 寸 1 分、股を 3 寸 6 分、弦を 4 寸 8 分とする。図のように直径の等しい円を配置するとき、その直径を求めよ。

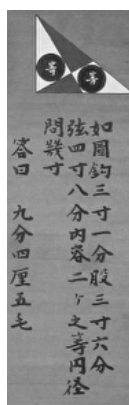


図 12 第 5 問の盤面

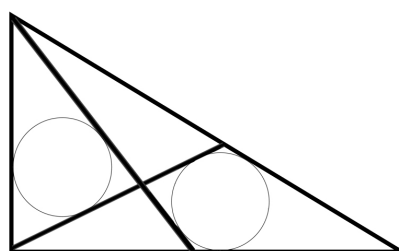


図 13 書き直したもの

8-2 第 5 問の解法

ここでは第 5 問の構造と解法について述べる。本問では、現れる方程式の解を実際に書き出すと複雑になりすぎてしまう。そこでやや抽象的ではあるが、導出した方程式の解を関数の形で表示することで、なるべく問題の構造部分に焦点を当てて解説することを目標とした。

まず、三角形の各辺の長さを a, b, c とする。図のように辺の長さ $x, y, z, w, \tilde{b}, \tilde{c}$ と角度 α, β とおき、以下のように三角形を分割して調べることにする。

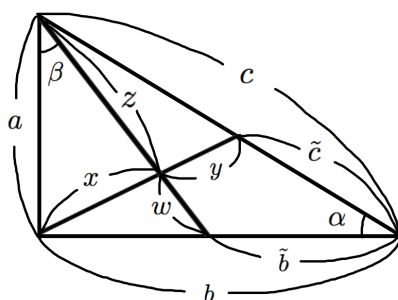


図 14 分割した図形に関する各辺の長さや角度

1. 辺の長さが a, x, z の三角形について考える。図の辺の関係から、 $\cos \beta = \frac{a}{z+w}$ である。また余弦定理から $\cos \beta = \frac{a^2 + z^2 - x^2}{2az}$ なので $\frac{a}{z+w} = \frac{a^2 + z^2 - x^2}{2az}$ であり、整理すると $w = \frac{a^2 - z^2 + x^2}{a^2 + z^2 - x^2}$ となる。よって w は x と z によって表された。
2. 辺の長さが $z+w, \tilde{b}, c$ の三角形について考える。図から $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ である。また余弦定理から $\cos \alpha = \frac{\tilde{b}^2 + c^2 - (z+w)^2}{2\tilde{b}c}$ なので、整理すると $\tilde{b}$ についての 2 次方程式 $\tilde{b}^2 - 2b\tilde{b} + c^2 - (z+w)^2 = 0$ を得る。ここで $b^2 - (c^2 - (z+w)^2) > 0$ とすると、図の条件から $\tilde{b} < b$ でなくてはならないので、 $\tilde{b} = b - \sqrt{b^2 - (c^2 - (z+w)^2)}$ である。よって、 $\tilde{b}$ は未知数 z, w の式として表されたことになる。
上記 1. と 2. によって、“ $\tilde{b}$ は変数 x と z によって表示された” ということになる。
3. 上と同様に、辺の長さが $x+y, b, \tilde{c}$ の三角形について考える。図から $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ である。また余弦定理から $\cos \alpha = \frac{\tilde{c}^2 + b^2 - (x+y)^2}{2\tilde{c}b}$ である。これを整理すると $\tilde{c}$ についての 2 次方程式が得られるので、これを解くと $\tilde{c} = \frac{b^2}{c} \pm \frac{\sqrt{b^4 - c^2\{b^2 - (x+y)^2\}}}{c}$ である。これにより、 $\tilde{c}$ は x と y の式で表されたことになる。
4. 角 $\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$ について考える。加法定理から $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{z+w} + \frac{b}{c} \cdot \frac{b - \tilde{b}}{z+w} = \frac{a^2 + b(b - \tilde{b})}{c(z+w)}$ である。ここで $\tilde{b}$ は z, w の式で表されることから、 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)$ も z, w の式で表されることが分かる。さらに上記の 1. により w は x と z で表されることから、 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)$ は x と z で表示できるということになる。
5. 辺の長さが $z, c - \tilde{c}, y$ の三角形について考える。余弦定理から $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \frac{z^2 + (c - \tilde{c})^2 - y^2}{2z(c - \tilde{c})}$ である。上記 4. の結果から、 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \frac{a^2 + b(b - \tilde{b})}{c(z+w)}$ なので、関係式 $\frac{z^2 + (c - \tilde{c})^2 - y^2}{2z(c - \tilde{c})} = \frac{a^2 + b(b - \tilde{b})}{c(z+w)}$ を得る。これにより、変数 y についての方程式が得られた。この方程式を y について解くと、最終的に y は x と z の式で表されるということになる。
6. また $\tilde{c}$ が x と y の式で表され、かつ y が x と z で表されることから、 $\tilde{c}$ は x と z で表されるということである。よって上記の方程式 $\frac{z^2 + (c - \tilde{c})^2 - y^2}{2z(c - \tilde{c})} = \frac{a^2 + b(b - \tilde{b})}{c(z+w)}$ を文字 z について解くことで、“ z は x で表された” ということになる。

以上の結果をまとめると、“変数 $z, \tilde{b}, y, w, \tilde{c}$ は、最終的に x を用いて表すことができる” ということになる。すなわち、分割した各小三角形の辺の長さは 1 つの変数 x で表示できたということである。以下ではこのことを踏まえて、 z を x の関数として $z = z(x)$ とする。また、同様に $y = y(x), \tilde{c} = \tilde{c}(x)$ とする。問題文に現れる内接円の半径をそれぞれ r_1, r_3 とすると、ヘロンの公式から $r_1 = \frac{2\sqrt{s_1(x)(s_1(x) - a)(s_1(x) - z(x))(s_1(x) - x)}}{a + z(x) + x}$ である。また、もう一つの三角形についても同様に $r_3 = \frac{2\sqrt{s_3(x)(s_3(x) - (x + y(x)))(s_3(x) - b)(s_3(x) - \tilde{c}(x))}}{(x + y(x)) + b + \tilde{c}(x)}$ であり、問題文の条件から $r_1 = r_3$ である。よって

$$\frac{2\sqrt{s_1(x)(s_1(x)-a)(s_1(x)-z(x))(s_1(x)-x)}}{a+z(x)+x}$$

$$=\frac{2\sqrt{s_3(x)(s_3(x)-(x+y(x)))(s_3(x)-b)(s_3(x)-\tilde{c}(x))}}{(x+y(x))+b+\tilde{c}(x)}$$

であるが、これは文字 x についての方程式である。これを解くことで x の値が求められるので、それぞれの文字についての計算結果を併用することで、各々の辺の長さが導出できる。更にその値を用いることで、目標の内接円の直径が求められる、ということになる。

注意 ただし上記の計算結果は相当複雑なものになり、解として現実的なものではない。明言化はされていないものの、角度などについての何らかの条件が付されていたものと考えられる。また問題文の辺の条件では、直角三角形が構成できない点にも注意すべきである。

9. 第6問

9-1 第6問の問題文の現代語訳と解釈

図16のように、直径1尺2寸の大球の中に1つの中球と直径4寸8分の小球が3つ配置されているとする。このとき、中球の直径を求めよ。

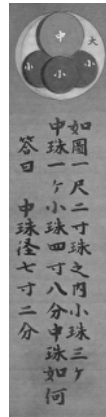


図15 第6問の盤面

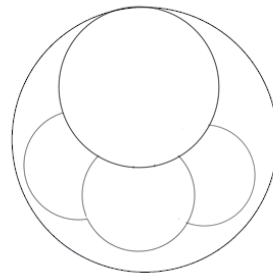


図16 書き直したもの

9-2 第6問の解答

それぞれの球の半径を大きい順に r_1, r_2 そして r_3 とする。問題の条件から $r_1 = 6$, $r_3 = 2.4$ である。小球の中心を含む平面における立体の断面図は、図17のようになる。

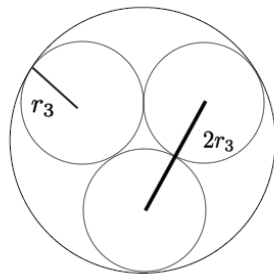


図17 小球の中心を含む断面

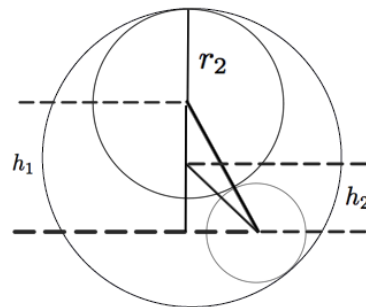


図18 小球、中球、大球の中心を含む断面

また、1つの小球と中球、大球の中心を含む平面で切ると図18のようになっている。ここで、図の中の大きい三角形の高さを h_1 とする。中球の中心と小球の中心を結ぶので、斜辺の

長さは $r_2 + r_3$ である。また横向き断面図 (図 17) から、底辺の長さは $\frac{2}{\sqrt{3}}r_3$ である。し

たがって三平方の定理から $h_1 = \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - \left(\frac{2r_3}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{r_2^2 + 2r_2r_3 - \frac{r_3^2}{3}}$ である。

次に図の中の小さい三角形の高さを h_2 とする。大球の中心と小球の中心を結ぶので、斜辺の長さは $r_1 - r_3$ である。また底辺の長さは $\frac{2r_3}{\sqrt{3}}$ なので、三平方の定理を用いると

$h_2 = \sqrt{(r_1 - r_3)^2 - \left(\frac{2r_3}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{r_1^2 - 2r_1r_3 - \frac{r_3^2}{3}}$ である。ここで r_1 と r_3 はすでに与えられているので、この h_2 も定数となっていることに注意しておく。このとき、縦方向の断面

図 (図 18) における大球の直径に注目すると、関係式 $r_2 + h_1 + (r_1 - r_2) = 2r_1$ を得る。これを整理すると、方程式 $r_2 + h_1 - h_2 - r_1 = 0$ が得られる。上記で得られた関係式において、

h_1, h_2 を r_1, r_2, r_3 を用いて書くと $r_2 + \sqrt{r_2^2 + 2r_2r_3 - \frac{r_3^2}{3}} - \sqrt{r_1^2 - 2r_1r_3 - \frac{r_3^2}{3}} - r_1 = 0$ である。これを r_2 について解けばよい。第 2 項を右辺に移項し、さらに定数項である第 3 項、

第 4 項をまとめて $K = \sqrt{r_1^2 - 2r_1r_3 - \frac{r_3^2}{3}} + r_1$ と書くと、 $r_2 - K = -\sqrt{r_2^2 + 2r_2r_3 - \frac{r_3^2}{3}}$ となる。書き直すと

$$K - r_2 = \sqrt{r_2^2 + 2r_2r_3 - \frac{r_3^2}{3}} \quad (12)$$

なので、2 乗して整理すると $K^2 - 2Kr_2 = 2r_2r_3 - \frac{r_3^2}{3}$ であり、 r_2 でまとめることで関係式 $K^2 + \frac{r_3^2}{3} = 2r_2(r_3 + K)$ を得る。よって $r_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3K^2 + r_3^2}{r_3 + K}$ を得る。従って求め

るものは中球の直径なので、 $2r_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3K^2 + r_3^2}{r_3 + K}$ である。ただし、 K は定数であり $K =$

$\sqrt{r_1^2 - 2r_1r_3 - \frac{r_3^2}{3}} + r_1$ である。ここで実際に数値を代入し、計算することで値を求めてみる

ことにする。いま定数 K は $K = \sqrt{6^2 - 2 \times 6 \times 2.4 - \frac{(2.4)^2}{3}} + 6 = 8.297825058615212 \dots$

である。この値を用いると中球の半径 r_2 は $r_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3K^2 + (2.4)^2}{2.4 + K} \doteq 3.30786 \dots$ となっ

ている。したがって、求める直径の値は $2r_2 = 6.615727992895774 \dots$ であることが分かった。

盤面における解答は 7 寸 2 分 なので、若干の誤差があると言える。

注意 今回の解法では問題の構造を明らかにするため、値を最後に代入した。しかし、方程式 (12) を直接解くことによって全く同じ値が得られる点に注意しておく。

10. 第 7 問

10-1 第 7 問の問題文の現代語訳と解釈

図 20 のような直径 3 寸 5 分の大円と直径 2 寸の中円がある。この 2 つの円に、図のように甲、乙、丙 3 つの円が外接しているとする。それぞれの円の直径を求めよ。

10-2 第 7 問の解答の準備

ここでは、本問を解くために有効な補題を 2 つ用意しておく。

補題 1 図 21 の大円の半径を r_1 、小円の半径を r_2 とすると、AB の長さは $2\sqrt{r_1r_2}$ である。

証明 図の直角三角形に注目する。斜辺の長さは、円の中心を結んだものなので $r_1 + r_2$ である。また高さは大円の半径から小円の半径を引いたもので、 $r_1 - r_2$ である。よって三平方の定理から $\overline{AB} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$ となり、結論を得る。 $\square$

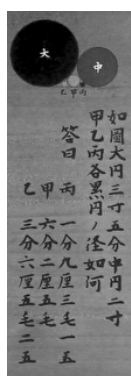


図 19 第 7 問の盤面

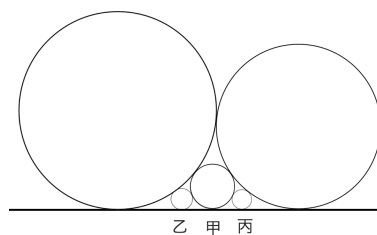


図 20 書き直したもの

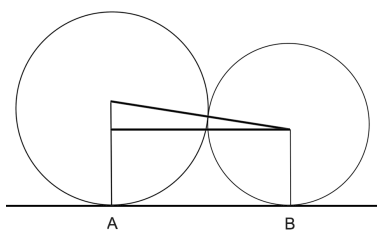


図 21 補題 1 の問題設定を図示したもの

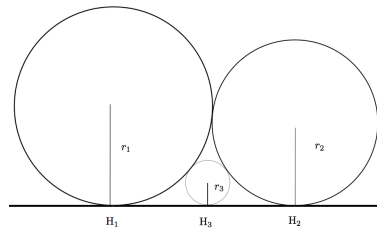


図 22 補題 2 の問題設定を図示したもの

補題 2 図 22 のように 3 つの円が接するとき、 $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ が成り立つ。

証明 補題 1 から、 $H_1H_3 = 2\sqrt{r_1r_3}$ 、 $H_2H_3 = 2\sqrt{r_2r_3}$ 、 $H_1H_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$ である。よって $H_1H_2 = H_1H_3 + H_3H_2$ なので、 $\sqrt{r_1r_2} = \sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_2r_3}$ である。全体を $\sqrt{r_1r_2r_3} \neq 0$ で割って整理することで、 $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ となり、結論を得る。□

10-3 第 7 問の解答

上記の補題を用いる。大円の半径を $r_1 = \frac{3.5}{2} = 1.75$ 、中円の半径を $r_2 = \frac{2}{2} = 1$ とおく。

1. 甲円について考える。甲円の半径を r_3 とすると、補題 2 から $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ である。逆数をとって整理すると $\sqrt{r_3} = \frac{\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1}} = \frac{\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2}(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2})$ である。よって 2 乗すると $r_3 = \frac{r_1r_2}{(r_1 - r_2)^2}(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2})^2$ となることから、求める直径は $2r_3 = \frac{2r_1r_2}{(r_1 - r_2)^2}(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2})^2$ である。ここで $r_1 = 1.75$ 、 $r_2 = 1$ を代入することで値を求めると $r_3 = 0.324329\dots$ である。よって求める直径の値は $2r_3 = 0.648659\dots$ を得る。盤面の解は 6 分 2 厘 5 毛 とあるので、誤差はあるものの近い値である。
2. 乙円について考える。乙円の半径を r_4 とする。上で求めた r_3 と補題 2 により、 $r_4 = \frac{r_1r_3}{(r_1 - r_3)^2}(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_3})^2$ となる。求める値は $2r_4 = \frac{2r_1r_3}{(r_1 - r_3)^2}(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_3})^2$ である。ここで $r_1 = 1.75$ 、 $r_3 = 0.324329\dots$ を代入することで値を求めると、 $r_4 = 0.158493\dots$ となる。すなわち求める直径の値は $2r_4 = 0.316986\dots$ である。盤面の解は 3 分 6 厘 5 毛 25... であり、誤差はあるものの近い値である。
3. 丙円について考える。丙円の半径を r_5 とすると、先ほどと同様の考え方を用いると $r_5 = \frac{r_2r_3}{(r_2 - r_3)^2}(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3})^2$ となる。求める直径は $2r_5 = \frac{2r_2r_3}{(r_2 - r_3)^2}(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3})^2$ である。ここで $r_2 = 1$ 、 $r_3 = 0.324329\dots$ を代入し値を求めると、 $r_5 = 0.131663\dots$

となる。すなわち求める直径の値は $2r_5 = 0.263326\dots$ である。盤面の解は $1\text{分}9\text{厘}3\text{毛}15\dots = 0.19315\dots$ であるので、若干の誤差があるということになる。

以上により、それぞれの値が求められた。

11. 第8問

11-1 第8問の問題文の現代語訳と解釈

図24のように、直角三角形の中に大・中・小の円を入れたとする。各辺の長さがそれぞれ3寸、4寸、5寸のとき、各円の直径を求めよ。

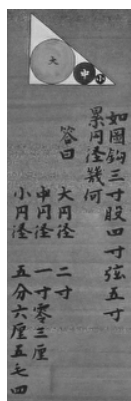


図23 第8問の盤面

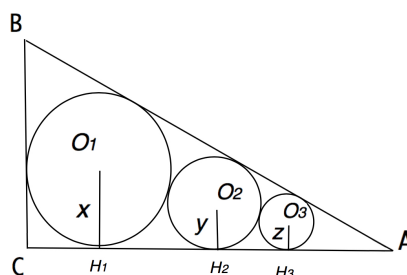


図24 書き直したもの

11-2 第8問の解答

図の直角三角形ABCに内接する円の半径を x, y, z とする。また、それぞれの中心から辺ACに下ろした垂線の足を H_1, H_2, H_3 とする。辺 AH_3 の長さを t とおくと、辺の長さについての関係式

$$x + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{yz} + t = 4 \quad (13)$$

$$(3 - x) + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{yz} + t = 5 \quad (14)$$

が成り立つ。ここからまず $x = 1$ が分かる。これを (13) または (14) に用いて、関係式

$$2\sqrt{y} + 2\sqrt{yz} + t = 3 \quad (15)$$

を得る。また三角形 AO_1H_1 、三角形 AO_2H_2 および三角形 AO_3H_3 は相似であるから、 $1:3 = y:(t + 2\sqrt{yz}) = z:t$ である。ここから以下の関係式

$$t + 2\sqrt{yz} = 3y \quad (16)$$

$$t = 3z \quad (17)$$

が得られる。関係式 (16) を (15) に用いると、 $2\sqrt{y} = 3 - 3y$ となり、図の配置から $y < 1$ に留意して解くと、 $y = \frac{11 - 2\sqrt{10}}{9} = 0.519493853\dots$ である。求める直径は $2y = 1.0388\dots$ であるから、盤面の解と一致している。次に z を考える。関係式 (17) から、 AO_3 の長さを z を用いて表すと、 $AO_3 = \sqrt{10}z$ であることに注意する。ここから AO_1 の長さについて、 $AO_1 = \sqrt{10} = (\sqrt{10} + 1)z + 2y + x$ となるので、これを z について整理し、先ほど求めた x と y の値を代入することで、 $z = \frac{13\sqrt{10} - 31}{9(\sqrt{10} + 1)} = 0.2698738636\dots$ を得る。求める直径は $2z = 0.5397\dots$ なので、盤面に書かれた解 $0.5654\dots$ と大きな誤差がないことがわかる。

12. 第9問

12-1 第9問の問題文の現代語訳と解釈

図26の円の面積を79とする。このとき、面積を半分にする一辺の長さを求めよ。

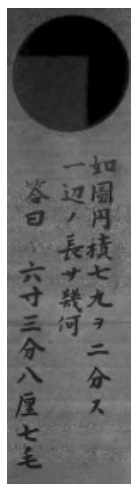


図25 第9問の盤面

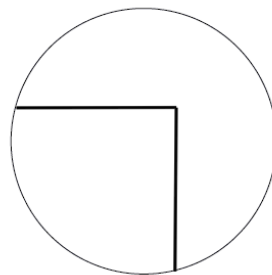


図26 書き直したもの

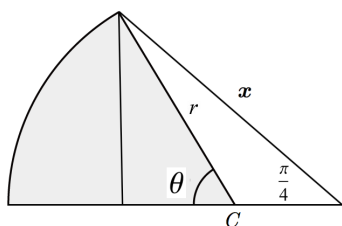


図27 1つの頂点を C とする三角形

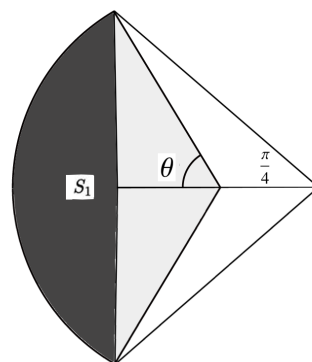


図28 面積 S_1 の部分を着色した図

12-2 第9問の解答

求める長さを x とする。また円の面積を S 、半径を r とすると、 $S = \pi r^2 = 79$ なので $r = \sqrt{\frac{79}{\pi}}$ である。ここで図のように1つの頂点を中心 C とする三角形に注目する。斜辺の長さは半径 r と等しく、高さは $\frac{x}{\sqrt{2}}$ なので、図の角度を θ とすると $r \sin \theta = \frac{x}{\sqrt{2}}$ という関係が得られる。つまり、中心角 θ についての正弦の値が得られたということになる。よって中心角の大きさ θ は x についての関数であり、これを $\theta(x)$ とすると $\theta(x) = \sin^{-1} \left(x \sqrt{\frac{\pi}{158}} \right)$ であることが分かる。次に、図27における1つの頂点を C とする三角形の面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \frac{1}{2} \times r \times \sin \theta = \frac{1}{2} r x \sqrt{\frac{\pi}{158}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \quad (18)$$

である。また中心角が θ なので、中心角 2θ の扇型の面積 $\tilde{S}$ は

$$\tilde{S} = \pi r^2 \times \frac{2\theta}{2\pi} = 79 \frac{\theta}{\pi} = \frac{79}{\pi} \sin^{-1} \left(x \sqrt{\frac{\pi}{158}} \right) \quad (19)$$

である。ここで、図28の面積 S_1 は(19)から(18)を2倍したものを引くことで得られるので、 $S_1 = \frac{79}{\pi} \sin^{-1} \left(x \sqrt{\frac{\pi}{158}} \right) - 2 \cdot \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{79}{\pi} \sin^{-1} \left(x \sqrt{\frac{\pi}{158}} \right) - \frac{x}{\sqrt{2}}$ である。さらに、

三角形の面積 S_2 は $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{x^2}{4}$ である。したがって、問題文の着色部分の面積は $S_1 + 2 \times S_2 = \frac{79}{\pi} \sin^{-1} \left(x \sqrt{\frac{\pi}{158}} \right) - \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2}$ である。この面積が $\frac{S}{2} = \frac{79}{2}$ であればよいので、 x についての方程式

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{79}{\pi} \sin^{-1} \left(x \sqrt{\frac{\pi}{158}} \right) = \frac{79}{2} \quad (20)$$

を解けばよいということになる。実際にこの方程式 (20) についての近似解を求めてみると、 $x \doteq 6.0317751453918584426 \dots$ となる。盤面に書かれた解は 6 寸 3 分 8 厘 7 毛となっており、かなり近い値を導出していることが確認できる。

13. まとめと今後の課題

以上から井於神社の算額における種々の問題は、単なる初等幾何の手法のみならず様々な技法を用いて考察する必要があることが判明した。特に第 4 問では、当時の数学者であった今村知商による定理を用いた。今村知商が定理を発見してからそう長い時間を経ずに、出題者が拡張した結果を生み出しているのは特筆すべき点である。本問だけでなく、この盤面からは“当時広く知られていた結果をさらに拡張し、新たな問題に適用したい”という出題者の方針を読み取ることができる。この方針は現代数学の研究で重視されるものと変わらず、西洋数学を輸入する遙か以前の段階で同様の価値観を有していたことは驚嘆に値する。また本研究では、おそらく復元時に原盤から読み取れなかったであろう数字を明らかにした。数値近似を含め、これほど高度な数学が構築されていたことに驚きを禁じ得ない。冒頭にも述べたが、関西圏に限定してもまだ解明されていない算額が多数存在している。引き続き調査を行い、当時の数学の水準および分布を明らかにすることが今後の課題である。

参考文献

- (1) 今村知商 (1639) 『豎亥録』 7 卷 2 丁ウ-4 丁ウ
- (2) 上野健爾・小川東・小林龍彦・佐藤賢一 (2023) 『関孝和全集』 岩波書店
- (3) 近畿数学史学会 (1992) 『近畿の算額—数学の絵馬を求めて—』 大阪教育図書
- (4) 佐藤 健一・小寺 裕・大竹 茂雄・牧野 正博 (2006) 『和算史年表』 東洋出版
- (5) 清水義雄 (1942 書写) 『社寺奉納算学集』 二卷
- (6) 城地茂 (2014) 『和算の再発見：東洋で生まれたもう一つの数学』 Dojin 選書
- (7) 森田 健 (2020) 「日本文化としての数学：和算と算額」『日本語・日本文化』 47, 大阪大学日本語日本文化教育センター, pp.81-107
- (8) 森田 健 (2022) 「畑天満宮に奉納された算額の問題と厳密解」『日本語教育センター紀要』 第 18 号, pp.15-26
- (9) 森田 健 (2023) 「和算と生國魂神社における算額」『日本語教育センター紀要』 第 19 号, pp.8-21
- (10) 吉田光由 (大矢真一校注) (1977) 『塵劫記』 岩波文庫, 岩波書店