平成25年度（2013年度）日本留学試験　**問題冊子**

# 数　学（８０分）

## 【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

**I　試験全体に関する注意**

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

**II　問題冊子に関する注意**

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

**III　解答方法に関する注意**

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

**解答に関する記入上の注意**

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\dfrac{2}{6}$ は $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ は $\dfrac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | ● | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ |
| B | ⊖ | ⓪ | ① | ② | ● | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ |
| C | ⊖ | ⓪ | ① | ② | ③ | ● | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ |
| D | ● | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ |
| E | ⊖ | ⓪ | ● | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ |

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

| 受験番号 | | | ＊ | | | | | ＊ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 名　　前 | | | | | | | | | | | | | | |

# 数学 コース 1

(基本コース)

## (コース2は 15 ページからです)

**「解答コース」記入方法**

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース1」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース1」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

| 解答コース Course | |
|---|---|
| コース 1<br>Course 1 | コース 2<br>Course 2 |
| ● | ○ |

**選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。**

# I

**問 1**　2 次関数

$$y = -x^2 - ax + 3 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について考える。

(1)　$a > 0$ であって，関数 ① の最大値が 7 であるならば，$a =$ $\boxed{\mathsf{A}}$ である。このとき，この関数のグラフの軸の方程式は $x =$ $\boxed{\mathsf{BC}}$ であり，また，このグラフと $x$ 軸との交点の $x$ 座標は $\boxed{\mathsf{DE}} \pm \sqrt{\boxed{\mathsf{F}}}$ である。

(2)　関数 ① のグラフを $x$ 軸方向に 2，$y$ 軸方向に $-3$ だけ平行移動して得られる曲線が $(-3, -5)$ を通るならば，$a =$ $\boxed{\mathsf{G}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

**問 2**　設問 (1) の $\boxed{\text{H}}$, $\boxed{\text{I}}$ と設問 (2) の $\boxed{\text{J}}$, $\boxed{\text{K}}$ には，下の ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

また，設問 (3) の $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{R}}$ には適する数を入れなさい。

実数 $x, y$ について次の条件 $p, q, r$ を考える。

$p$：　$x, y$ が等式 $(x+y)^2 = a(x^2+y^2)+bxy$ を満たしている。
ただし，$a, b$ は実数で定数とする。

$q$：　$x=0$ かつ $y=0$ である。

$r$：　$x=0$ または $y=0$ である。

(1)　条件 $p$ において，$a=b=1$ とする。このとき，$p$ は $q$ であるための $\boxed{\text{H}}$。
また，$p$ は $r$ であるための $\boxed{\text{I}}$。

(2)　条件 $p$ において，$a=b=2$ とする。このとき，$p$ は $q$ であるための $\boxed{\text{J}}$。
また，$p$ は $r$ であるための $\boxed{\text{K}}$。

(3)　条件 $p$ において，$a=2$ とすると，$p$ の式は

$$\left(x+\frac{b-\boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}}y\right)^2+\left(\boxed{\text{N}}-\frac{\left(b-\boxed{\text{O}}\right)^2}{\boxed{\text{P}}}\right)y^2=0$$

と変形できる。したがって，$p$ が $q$ であるための必要十分条件となるのは，$b$ が

$$\boxed{\text{Q}} < b < \boxed{\text{R}}$$

を満たすときに限る。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{S}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

# II

**問 1**　袋の中に白球が 1 個，赤球が 3 個，黒球が 5 個，計 9 個の球が入っている。この袋の中から同時に 2 個の球を取り出す。

いま，各球の点数を，白球が 5 点，赤球が 3 点，黒球が 1 点であるとする。このとき，この試行によって取り出された 2 つの球の点数の合計得点を考える。

(1)　最高の得点は $\boxed{\mathsf{A}}$ であり，それが起こる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{B}}}{\boxed{\mathsf{CD}}}$ である。

(2)　得点が 6 になる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}$ である。

(3)　得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\mathsf{GH}}}{\boxed{\mathsf{I}}}$ である。

注）試行：trial，期待値：expected value

- 計算欄 (memo) -

**問 2**　自然数 $n$ が完全平方数であるとは，$n = x^2$ を満たす自然数 $x$ が存在することである。同様に，$n$ が完全立方数であるとは，$n = x^3$ を満たす自然数 $x$ が存在することである。

次の 2 つの場合について，$n$ をそれぞれ求めよう。

(i)　$n$ を完全平方数とする。$n$ に 13 を加えた数も完全平方数である。

(ii)　$n$ を完全立方数とする。$n$ に 61 を加えた数も完全立方数である。

まず (i) を考える。完全平方数の定義より，$x$ を自然数として $n = x^2$ と表せる。また，(i) の条件より，$y$ を自然数として

$$x^2 + 13 = y^2$$

と表せる。したがって，$x < y$ であることから，$y - x = \boxed{\mathsf{J}}$ かつ $y + x = \boxed{\mathsf{KL}}$ であることが分かり

$$x = \boxed{\mathsf{M}}, \quad y = \boxed{\mathsf{N}}$$

を得る。よって，$n = \boxed{\mathsf{OP}}$ である。

次に，(ii) を考える。(i) のときと同様に，(ii) の条件より，$x$ を自然数として $n = x^3$，また，$y$ を自然数として

$$x^3 + 61 = y^3$$

と表すことができる。これを解いて

$$x = \boxed{\mathsf{Q}}, \quad y = \boxed{\mathsf{R}}$$

を得るから，求める完全立方数 $n$ は $\boxed{\mathsf{ST}}$ である。

**- 計算欄 (memo) -**

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{U}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

## III

$a$ を定数とする。2 次不等式

$$x^2-2(a+2)x+25>0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。

不等式 ① の左辺は

$$\left(x-a-\boxed{\mathsf{A}}\right)^2-a^2-\boxed{\mathsf{B}}\,a+\boxed{\mathsf{CD}}$$

と変形できる。したがって

(1)　不等式 ① がすべての実数 $x$ に対して成り立つための条件は

$$\boxed{\mathsf{EF}} < a < \boxed{\mathsf{G}}$$

である。

(2)　不等式 ① が $x \geqq -1$ を満たすすべての実数 $x$ に対して成り立つための条件は

$$\boxed{\mathsf{HIJ}} < a < \boxed{\mathsf{K}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

# IV

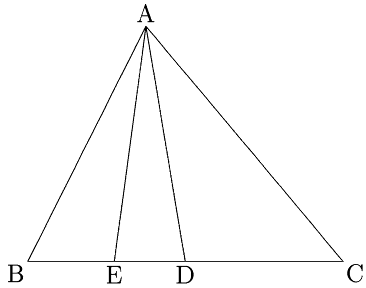
右の図において

$$\mathrm{AB}=4,\quad \mathrm{AC}=5,\quad \cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{8}$$

であり，また

$$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ACB},\quad \angle\mathrm{CAE}=\angle\mathrm{ABC}$$

であるとする。




(1)　△ABC の面積を $S$ とおくと

$$S=\frac{\boxed{\mathbf{AB}}\sqrt{\boxed{\mathbf{C}}}}{\boxed{\mathbf{D}}}$$

であり，また，BC $=$ $\boxed{\mathbf{E}}$ である。

(2)　△ABD と △ACE の面積をそれぞれ $S_1$, $S_2$ とおくと

$$S:S_1:S_2=1:\frac{\boxed{\mathbf{F}}}{\boxed{\mathbf{G}}}:\frac{\boxed{\mathbf{HI}}}{\boxed{\mathbf{JK}}}$$

である。

(3)　△ADE の面積を $T$ とおくと

$$T=\frac{\boxed{\mathbf{LM}}\sqrt{\boxed{\mathbf{N}}}}{\boxed{\mathbf{OP}}}$$

である。また，DE $=\dfrac{\boxed{\mathbf{Q}}}{\boxed{\mathbf{R}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

| $\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{S}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。<br>コース 1 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。<br>**解答用紙の解答コース欄に「コース 1」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。** |
|---|

| **この問題冊子を持ち帰ることはできません。** |
|---|

# 数学 コース 2
## (上級コース)

**「解答コース」記入方法**

解答コースには「コース 1」と「コース 2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース 2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース 2」を ◯ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

| 解答コース Course | |
|---|---|
| コース 1<br>Course 1 | コース 2<br>Course 2 |
| ○ | ● |

**選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。**

# I

**問 1**　2 次関数

$$y = -x^2 - ax + 3 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について考える。

(1)　$a > 0$ であって，関数 ① の最大値が 7 であるならば，$a =$ $\boxed{\mathbf{A}}$ である。このとき，この関数のグラフの軸の方程式は $x =$ $\boxed{\mathbf{BC}}$ であり，また，このグラフと $x$ 軸との交点の $x$ 座標は $\boxed{\mathbf{DE}} \pm \sqrt{\boxed{\mathbf{F}}}$ である。

(2)　関数 ① のグラフを $x$ 軸方向に 2，$y$ 軸方向に $-3$ だけ平行移動して得られる曲線が $(-3, -5)$ を通るならば，$a =$ $\boxed{\mathbf{G}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

**問 2**　設問 (1) の $\boxed{\mathsf{H}}$, $\boxed{\mathsf{I}}$ と設問 (2) の $\boxed{\mathsf{J}}$, $\boxed{\mathsf{K}}$ には，下の ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

また，設問 (3) の $\boxed{\mathsf{L}}$ ～ $\boxed{\mathsf{R}}$ には適する数を入れなさい。

実数 $x, y$ について次の条件 $p, q, r$ を考える。

$p$：　$x, y$ が等式 $(x+y)^2 = a(x^2+y^2)+bxy$ を満たしている。
ただし，$a, b$ は実数で定数とする。

$q$：　$x=0$ かつ $y=0$ である。

$r$：　$x=0$ または $y=0$ である。

(1)　条件 $p$ において，$a=b=1$ とする。このとき，$p$ は $q$ であるための $\boxed{\mathsf{H}}$。
また，$p$ は $r$ であるための $\boxed{\mathsf{I}}$。

(2)　条件 $p$ において，$a=b=2$ とする。このとき，$p$ は $q$ であるための $\boxed{\mathsf{J}}$。
また，$p$ は $r$ であるための $\boxed{\mathsf{K}}$。

(3)　条件 $p$ において，$a=2$ とすると，$p$ の式は

$$\left(x+\frac{b-\boxed{\mathsf{L}}}{\boxed{\mathsf{M}}}y\right)^2+\left(\boxed{\mathsf{N}}-\frac{\left(b-\boxed{\mathsf{O}}\right)^2}{\boxed{\mathsf{P}}}\right)y^2=0$$

と変形できる。したがって，$p$ が $q$ であるための必要十分条件となるのは，$b$ が

$$\boxed{\mathsf{Q}} < b < \boxed{\mathsf{R}}$$

を満たすときに限る。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

- 計算欄 (memo) -

| I | の問題はこれで終わりです。 | I | の解答欄 | S | ～ | Z | はマークしないでください。 |

## II

数列 $\{a_n\}\,(n=1, 2, 3, \cdots)$ は等差数列で

$$a_2 = 2, \quad a_6 = 3a_3$$

を満たしている。このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{r^{a_n}}$ を考える。ただし，$r$ は正の実数である。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項を $a$，公差を $d$ とおくと

$$a = \boxed{\mathbf{AB}}, \quad d = \boxed{\mathbf{C}}$$

である。

(2)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{r^{a_n}}$ は，初項が $\boxed{\mathbf{D}}\,r^{\boxed{\mathbf{E}}}$，公比が $\dfrac{\boxed{\mathbf{F}}}{r^{\boxed{\mathbf{G}}}}$ の無限等比級数である。

したがって，この級数は

$$r > 3^{\frac{\boxed{\mathbf{H}}}{\boxed{\mathbf{I}}}}$$

のとき収束し，その和 $S$ は

$$S = \frac{\boxed{\mathbf{J}}\,r^{\boxed{\mathbf{K}}}}{r^{\boxed{\mathbf{L}}} - \boxed{\mathbf{M}}}$$

である。

(3)　和 $S$ が最小となるのは

$$r = \boxed{\mathbf{N}}^{\frac{\boxed{\mathbf{O}}}{2}}$$

のときである。

注）等差数列：arithmetic progression，級数：series，公差：common difference，
公比：common ratio，無限等比級数：infinite geometric series

- 計算欄 (memo) -

| |
|---|
| $\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{P}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。 |

# III

$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲において，関数

$$f(x) = \sin 2x - 3(\sin x + \cos x)$$

を考える。

(1)　$t = \sin x + \cos x$ とおく。$t$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathsf{A}} - \sqrt{\boxed{\mathsf{B}}}}{\boxed{\mathsf{C}}} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\mathsf{D}}}$$

である。

(2)　$f(x)$ は，最小値 $\boxed{\mathsf{E}} - \boxed{\mathsf{F}}\sqrt{\boxed{\mathsf{G}}}$ を $x = \dfrac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}\pi$ でとる。

**- 計算欄 (memo) -**

$\boxed{\mathrm{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{J}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

# IV

**問 1**　文中の $\boxed{\textsf{A}}$ ～ $\boxed{\textsf{I}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の性質を用いて，$a^{a+1}$ と $(a+1)^a$ の大小関係を調べよう。
ただし，$a>0$ とする。

(1)　$f(x)$ の導関数を求めると

$$f'(x)=\frac{\boxed{\textsf{A}}-\log x}{x^{\boxed{\textsf{B}}}}$$

であるから，$f(x)$ が単調増加である $x$ の変域は $\boxed{\textsf{C}}<x\leqq\boxed{\textsf{D}}$ であり，
単調減少である $x$ の変域は $\boxed{\textsf{E}}\leqq x$ である。

(2)　$p=a^{a+1}$，$q=(a+1)^a$ とおくと

$$\log p-\log q=\left(a^{\boxed{\textsf{F}}}+a\right)\left\{f(a)-f\left(a+\boxed{\textsf{G}}\right)\right\}$$

である。よって

$0<a<\dfrac{3}{2}$　ならば，$p$ $\boxed{\textsf{H}}$ $q$ であり

$3<a$　ならば，$p$ $\boxed{\textsf{I}}$ $q$ である

ことが分かる。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ | $0$ | ① | $1$ | ② | $2$ | ③ | $3$ |
| ④ | $e$ | ⑤ | $e+1$ | ⑥ | $\dfrac{1}{e}$ | | |
| ⑦ | $>$ | ⑧ | $=$ | ⑨ | $<$ | | |

注）導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

**問 2**　$0 < a < 1$ とする。曲線 $y = xe^{2x}$ および $x$ 軸と直線 $x = a - 1$ で囲まれる部分の面積と，曲線 $y = xe^{2x}$ および $x$ 軸と直線 $x = a$ で囲まれる部分の面積の和を $S(a)$ とする。このとき，$S(a)$ を最小とする $a$ の値を求めよう。

$xe^{2x}$ の不定積分は

$$\frac{\boxed{\mathsf{J}}}{\boxed{\mathsf{K}}}\left(\boxed{\mathsf{L}}\,x - 1\right)e^{2x} + C \qquad \left(C\text{ は積分定数}\right)$$

である。

$xe^{2x}$ の値は，$x < 0$ のとき $xe^{2x} < 0$ であり，$x \geqq 0$ のとき $xe^{2x} \geqq 0$ である。したがって，$S(a)$ の値は

$$S(a) = \frac{\boxed{\mathsf{M}}}{\boxed{\mathsf{N}}}\left\{\boxed{\mathsf{O}} + \left(\boxed{\mathsf{P}}\,a - \boxed{\mathsf{Q}}\right)e^{2(a-1)} + \left(\boxed{\mathsf{R}}\,a - 1\right)e^{2a}\right\}$$

である。また

$$S'(a) = \left(a - \boxed{\mathsf{S}}\right)e^{2(a-1)} + ae^{2a}$$

であるから，$S(a)$ を最小とする $a$ の値は $a = \dfrac{\boxed{\mathsf{T}}}{e^2 + \boxed{\mathsf{U}}}$ である。これは $0 < a < 1$ を満たしている。

注）積分定数：constant of integration

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{V}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

**解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，**
**もう一度確かめてください。**

**この問題冊子を持ち帰ることはできません。**